Théorèmes d'incomplétude de Gödel: analyse terminologique

Tomić, Tomislav

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FILOZOFSKI FAKULTET
Odsjek za romanistiku

GÖDELOVI TEOREMI NEPOTPUNOSTI : TERMINOLOŠKA ANALIZA

diplomski rad

Tomislav Tomić

Mentorica :

dr. sc. Ivanka Rajh

UNIVERSITÉ DE ZAGREB
FACULTÉ DE PHILOSOPHIE ET
LETTRES
Département d'études romanes

LES THÉORÈMES D'INCOMPLÉTUDE DE GÖDEL : ANALYSE TERMINOLOGIQUE

Mémoire de Master
Master en langue et lettres
françaises

Filière traduction

Soutenu par :

Tomislav Tomić

Directrice de recherche:
dr.sc. Ivanka Rajh

Résumé

Ce mémoire de master explore la terminologie mathématique et logique. Il est divisé en trois sections principales. Les définitions et les présentations des concepts terminologiques cruciaux sont incluses dans la première section, qui est consacrée à l'aspect théorique de la terminologie. La deuxième section présente l'approche utilisée dans la section pratique et explique la sélection du domaine de recherche. Les produits terminographiques créés à la suite de ces travaux sont ensuite présentés dans la troisième section, dont la traduction du texte spécialisé, un glossaire d'environ 250 termes, 10 fiches terminologiques et un arbre de domaine qui décrit les relations entre les concepts dans un ordre hiérarchique.

Mots clés : mathématiques, logique, Gödel, arithmétique, axiome, preuve, indémontrable, vrai

Sažetak

Ovaj diplomski rad posvećen je terminologiji matematike i logike. Podijeljen je na tri glavna dijela. Prvi se dio bavi teoretskim aspektom terminologije te uključuje definicije i prikaz ključnih terminoloških pojmova. U drugom se dijelu najavljuje metodologija primijenjena u praktičnom dijelu rada te se objašnjava odabir područja koje se proučava. U trećem dijelu prikazani su rezultati praktičnog rada na temu matematike i logike: prijevod stručnog teksta, glosar s oko 250 termina, 10 terminoloških kartica i terminološko stablo koje prikazuje hijerarhijske odnose među terminima.

Ključne riječi: matematika, logika, Gödel, aritmetika, aksiom, dokaz, nedokaziv, istinit

Table des matières

1. INTRODUCTION 1
2. PARTIE THÉORIQUE 2
   2.1. Définition de la terminologie 2
   2.2. Evolution de la terminologie 3
   2.3. Terminologie, terminographie et terminotique 4
   2.4. Terminologie, linguistique et lexicologie 5
   2.5. Langue générale, langue commune et langue de spécialité 5
   2.6. Objet, notion et désignation 6
   2.7. Terme et mot 7
3. MÉTHODOLOGIE 9
   3.1. Domaine 9
   3.2. Corpus 10
   3.3. Traduction 11
   3.4. Glossaire 12
   3.5. Fiches terminologiques 13
   3.6. Arbre de domaine 14
4. PARTIE PRATIQUE 16
   4.1. Traduction et texte original 16
   4.2. Glossaire 68
   4.3. Fiches terminologiques 83
   4.4. Arbre de domaine 94
5. CONCLUSION 95
6. SOURCES 96
   6.1. Corpus 96
   6.2. Bibliographie 98
   6.3. Sitographie 99

1. Introduction

Dans ce mémoire de master, les théorèmes d'incomplétude de Gödel sont abordés comme un domaine particulier des mathématiques et de la logique qui nécessite davantage d'investigations terminologiques. Kurt Gödel a montré que sous certaines conditions dans n'importe quel système formel, il existe des déclarations vraies mais indémontrables. Les mathématiques, étant un système formel, ainsi que la logique l'est, ont brusquement perdu leur garantie de la vérité, même de la validité de méthodes qui n'étaient encore jamais réfutées. Par exemple, après Gödel et ses résultats, les mathématiciens peu à peu perdent l'intérêt dans le problème le plus fameux des mathématiques (la conjecture de Goldbach), parce qu'il est maintenant prouvé que cette conjecture peut être vrai, mais ne pourrait jamais être démontrée, ou en plus, en train de prouver cette conjecture, on pourrait trouver des incohérences dans les mathématiques elles-mêmes.

Les trois parties de ce mémoire présentent les aspects théorique, méthodologique et pratique de notre travail. Dans la section théorique, nous tenterons d'abord de définir et d'expliquer ce qu'est la terminologie, ainsi que la manière dont elle s'est développée en tant que science. Les concepts de base de la description terminographique - langage spécialisé, objet, notion, désignation et terme - seront présentés, ainsi qu'une tentative de délimitation d'autres disciplines comme la terminographie, la terminotique, la linguistique et la lexicologie. Ensuite, nous parlerons des arborescences de domaines, des corpus, des traductions, des glossaires et des fiches terminologiques. Dans la deuxième partie, nous nous efforcerons également de fournir une explication détaillée des méthodes que nous avons utilisées pour la partie pratique.

Les résultats de notre étude, comprenant la traduction d'un texte contemporain sur Gödel du français vers le croate, un glossaire, et 10 fiches terminologiques bilingues français-croate couvrant des concepts liés au sujet des mathématiques et de la logique, seront présentés dans la troisième section de ce travail. De plus, un arbre de domaine avec les termes clés du domaine de recherche sera affiché. Le mémoire de master se termine par une conclusion et une bibliographie.

2. Partie théorique

2.1. Définition de la terminologie

Avant de présenter notre travail, il faut tout d'abord définir ce qu'on entend par terminologie. Bien que cela semble être une question simple, ce mot est en fait polysémique, c'est-à-dire qu'il désigne plusieurs notions.

Dans son sens le plus étroit, c'est un « domaine du savoir interdisciplinaire et transdisciplinaire ayant trait aux notions et à leurs représentations (termes, symboles, etc.) » (Felber 1987 : 1) ou encore « la science qui étudie, d'une part, les notions et leurs dénominations dans le cadre des vocabulaires spécialisés (étude théorique) et, d'autre part, les méthodes propres au travail terminologique » (CST 2014 : 16).

Dans son sens plus large, « le mot terminologie signifie un "ensemble de mots techniques appartenant à une science, un art, un auteur ou un groupe social", par exemple, la terminologie de la médecine ou la terminologie des informaticiens » (Pavel et Nolet 2001 : XVII).

Certains auteurs ajoutent à ces définitions une troisième, par exemple Felber (1987 : 1), qui écrit que c'est aussi une « publication dans laquelle le système des notions liées d'un domaine du savoir est représenté par des termes ». Ici on peut aussi mentionner Gouadec (1990 : 3) qui, pour résumer comment identifier les différentes significations, distingue *la terminologie*, *une (chaque) terminologie* et *les terminologies*.

Nous pouvons en conclure que la terminologie désigne le vocabulaire spécialisé d'un domaine scientifique qui fait l'objet de la terminologie en tant que discipline.

2.2. Evolution de la terminologie

Au XVIIIe siècle, la terminologie en tant que pratique était déjà utilisée dans les sciences de la chimie, de la botanique et de la zoologie. L'exigence pour les scientifiques de disposer d'un ensemble de lignes directrices pour la construction de la terminologie s'est accrue au XIXe siècle en raison de l'internationalisation de la science. Il devient également nécessaire de nommer de nouveaux concepts et de s'accorder sur les termes utilisés en raison des avancées industrielles du XXe siècle (Cabré 1999 : 1).

L'étude de la terminologie est apparue pour la première fois dans les années 1930. L'ingénieur autrichien Eugen Wüster, à qui l'on attribue la création de la terminologie moderne, a publié sa thèse de doctorat sur la normalisation internationale du langage dans les domaines techniques en 1931. Ce travail a abouti à la formation du Comité technique 37 de l'Organisation internationale de normalisation (ISO/TC 37), au développement de théories terminologiques, et la fondation de l'école de Vienne. Ses recherches portent sur des sujets tels que « la nature des notions, les rapports et les liens entre les notions, les caractéristiques des notions, la description des notions (définition), la formation des termes, la normalisation des notions et des termes, l'internationalisation des notions et des termes, etc. » (Felber 1987 : 24). Ses idées se sont répandues à d'autres pays et organisations internationales.

L'école de Prague et l'école soviétique sont deux autres écoles terminologiques illustres qu'il convient de mentionner ici. L'école de Prague, dont les théories ont été influencées par Ferdinand de Saussure, a entrepris d'étudier le langage courant d'un point de vue fonctionnel, le considérant comme un moyen de communication dans toutes les sphères de la vie sociale. L'école soviétique a été créée par deux ingénieurs et a donné la priorité à la standardisation des concepts et du vocabulaire (Felber 1987 : 26-29).

Selon Cabré (1999 : 5-6), après cette époque dont nous avons parlé et qu'elle intitule *les origines* (de 1930 à 1960), suivent trois étapes dans le développement de la terminologie moderne: *la structuration* (de 1960 à 1975), *l'éclatement* (de 1975 à 1985) et *les larges horizons* (à partir de 1985).

Les premières bases de données se développent pendant la phase de *structuration* et la terminologie linguistique commence à se standardiser. Le « boom » des initiatives de planification linguistique et de terminologie, l'importance accrue de la terminologie dans la modernisation de la langue et l'utilisation croissante des ordinateurs personnels sont toutes des caractéristiques de la période *d'éclatement*. La dernière étape, connue sous le nom de *larges horizons*, qui se poursuit à ce jour, est caractérisée par l'informatique, la coopération mondiale et la planification linguistique dans les pays en développement.

2.3. Terminologie, terminographie et terminotique

Tandis que les terminologues définissent l'objet du travail terminologique, analysent les relations entre les termes et les notions, les principes de formation et d'évolution, étudient les corrélations, fixent les principes que les terminographes doivent respecter, infléchissent les usages et informent sur les décisions de la politique linguistique, le terminographe est « l'agent qui recense les éléments contenus dans les lexiques, glossaires, inventaires, dictionnaires, fichiers, banques de données ou autres répertoires de « vocabulaires spécialisés » (Gouadec 1990 : 3-4).

D'après L'Homme (2004 : Introduction) « Dans les années 1970, Alain Rey a proposé de faire le départ entre les volets appliqué et théorique de la terminologie et de les étiqueter respectivement terminographie et terminologie ». Ensuite, dans le même œuvre, on confirme que la « terminographie regroupe les diverses activités d'acquisition, de compilation et de gestion des termes » et que « la terminologie se penche sur les questions fondamentales que soulève l'étude des termes et propose un cadre conceptuel pour les appréhender »

La terminotique associe la terminologie à l'informatique. Il s'agit d'utiliser des ordinateurs pour stocker, gérer et consulter des données terminologiques. Elle s'applique aujourd'hui aux dictionnaires en ligne, aux logiciels d'aide à la traduction, aux machines à traduire, etc. (Gouadec 1990 : 4). Au départ, l'informatique était notamment utilisée pour stocker et diffuser des données terminologiques via des bases de données (CST 2014 : 98). Depuis, elle a évolué d'une manière qui a complètement transformé le métier de terminologue au point qu'on ne peut plus imaginer s'en passer.

2.4. Terminologie, linguistique et lexicologie

L'étude de la terminologie est étroitement liée à la linguistique en raison de sa méthodologie et de son objectif. Ce qui la rend différente, c’est qu’elle a une tendance normalisatrice et qu’elle étudie seulement le vocabulaire actuel, alors que la linguistique suit l’évolution de la langue dans le temps (CST 2014 : 16-17). En effet, la lexicographie, la traduction générale ou technique, l'enseignement des langues, l'écriture, l'interprétation et le traitement informatique du langage relèvent d’un domaine de la linguistique appliquée, qui comprend également la terminologie (Pavel et Nolet 2001 : 111). De plus, l'expression *lexicographie spécialisée* a récemment été utilisée comme synonyme de terminographie, ce qui « renforce encore » ses associations fréquentes avec la lexicologie et la lexicographie (Pavel et Nolet 2001 : XVII). Gouadec (1990 : 13, 27) affirme qu'il s'agit d'un sous-domaine de la lexicologie ; d'autres sources affirment qu'il s'agit d'un domaine distinct.

Les discussions proviennent du fait que les deux disciplines ont beaucoup de caractéristiques en commun : elles traitent les mots, elles ont toutes les deux des aspects théoriques et appliquées et s’intéressent aux dictionnaires. Par exemple, la lexicologie s’intéresse à tous les mots d’une langue, alors que la terminologie s’occupe uniquement du vocabulaire d’un domaine ou d’une activité professionnelle spécifique. En conséquence, la terminologie est incluse dans le domaine plus large de la lexicologie. Par ailleurs, alors que la terminologie est davantage centrée sur les termes et s'adresse davantage aux spécialistes, la lexicologie traite des mots et donne des unités lexicologiques sous une forme conventionnelle à usage pratique (Cabré 1999 : 35-36).

2.5. Langue générale, langue commune et langue de spécialité

Puisque les concepts sont définis en fonction de leur appartenance à la langue de spécialité, également appelée langue spécialisée, c’est en fait une notion cruciale en terminologie. La langue de spécialité est aussi appelée langage scientifique, langage technique, etc. Il faudrait d'abord définir la langue commune et générale avant de définir la langue de spécialité. Pour certains auteurs, il s’agit de synonymes (par ex. Boutin-Quesnel et al. 1985 : 21, Pavel et Nolet 2001 : 110). D'autres prétendent que le terme *langue générale* est plus large. D’après Humbert-Droz (2014 : 7), « la langue commune est donc un ensemble que partagent tous les locuteurs d'une langue donnée, tout en ne relevant pas d'un domaine spécialisé. La langue générale est cette langue donnée, c'est-à-dire toute la langue ». Ainsi, il est clair que, au sens large, la langue commune est une composante de la langue générale. Le terme *langue générale* peut « s'employer soit dans le sens de langue entière soit dans le sens de langue commune » (ibid. : 8).

La langue commune, selon Pavel et Nolet (2001 : 17), est simplement la langue utilisée dans la vie quotidienne. Au contraire, ils disent que la langue spécialisée est « celle de la communication sans ambiguïté dans un domaine particulier de savoir ou de pratique, basée sur un vocabulaire et des usages linguistiques qui lui sont propres ». Elle aussi fait partie de la langue générale.

Il serait peut-être préférable de s'y référer au pluriel car il n'y a pas une seule langue de spécialité et ils sont uniques aux domaines en question. On peut retrouver une unité simultanément dans une langue de spécialité et dans la langue vivante du fait que la plupart de ces langues se fondent et impactent la langue commune (CST 2014 : 25). Cela vaut également pour les distinctions entre différentes langues de spécialité, notamment lorsqu'il s'agit de disciplines étroitement liées.

2.6. Objet, notion et désignation

Nous voudrions soulever ici quelques questions fondamentales du travail terminologique. Tout d'abord, un objet est toute entité qu'on peut appréhender. Il peut être concret ou abstrait et il peut être conceptualisé sous forme de notion (CST 2014 : 18).

La notion, également connu sous le nom de concept, est une « représentation mentale d'un objet constituée à partir d'une combinaison unique de caractères (appelés aussi caractéristiques) » qui « servent à définir et à délimiter une notion » et déterminent sa place dans un système de notions (CST 2014 : 18). En d'autres termes, les « objets du monde réel sont réunis dans une même classe s'ils partagent des caractéristiques communes ». En terminologie classique on ne cherche pas à expliquer la nature de la notion et on considère qu’elle précède la forme linguistique. Il s'agit donc d'une technique onomasiologique où le terminographe part de l'idée et s'efforce de la réaliser dans le langage (L'Homme 2004 : 1). Les notions existent indépendamment des termes. La « représentation conventionnelle d’un concept » est connue sous le nom de désignation (Pavel et Nolet 2001 : 106). Elles peuvent être verbales (les termes et les noms) ou non verbales (les symboles). La désignation la plus fréquente est le terme et c’est pourquoi il est souvent utilisé à la place de la désignation (CST 2014 : 20).

2.7. Terme et mot

L'élément central d'un ouvrage terminologique est le terme, souvent appelé unité terminologique. Il est « la désignation verbale d’une notion en langue de spécialité » qui peut être constituée « d’un mot, d’un groupe ou d’une combinaison de mots (terme complexe ou syntagme), d’une locution (locution technique, phraséologie) ou d’une forme abrégée (abréviation, sigle ou acronyme) » (CST 2014 : 20).

Felber (1987 : 151) affirme que les termes doivent être précis, succincts, simples à épeler et à prononcer, linguistiquement appropriés et propices à la création de dérivés. De plus, ils doivent être monosémiques, mononymes et faire partie d'un système de termes dans les écrits normatifs.

Il ne faut pas confondre les termes avec les mots orthographiques. Bien que chaque terme soit un mot, chaque mot n’est pas un terme. Tout d’abord, les mots sont très souvent polysémiques, alors que le terme relève de la langue de spécialité et il est en relation de monosémie avec le concept qu’il désigne, c’est-à-dire il désigne seulement ce concept. En revanche, les mots ont d'autres éléments - des connotations (Thoiron et Béjoint 2010 : 108).

Ensuite, Pavel et Nolet (2001 : 17-18) mentionnent la fréquence d’emploi du terme et son entourage contextuel qui sont en général figés, ainsi que les indicateurs typographiques (gras, italiques, etc.). De plus, contrairement aux mots, les termes sont très souvent composés, pour la plupart ils sont de nature nominale, ils n’ont que rarement des synonymes, ils tendent à être internationaux, etc.

Le processus de création de termes est le même que la création de mots dans le langage général, mais les termes sont créés par nécessité une fois qu'un nouveau concept émerge, alors que le néologisme lexical se produit plus naturellement dans le langage vivant. Ils circulent parmi les experts d'un domaine et demandent à être nommés dans de nombreuses langues après avoir été volontairement appelés par leurs concepteurs. On peut donc conclure que le processus de génération des termes est conscient (Křečková 1997 : 62-63).

Les termes peuvent être formés de différentes manières. Les termes-mots, issus de la morphologie (dérivation), morphologique et syntagmatique (composition, confixation), ou de la réduction, et les termes-syntagmes, issus de la formation syntagmatique, sont les deux principaux types de désignations terminologiques identifiés par Křečková (1997 : 64 , 69). Elle souligne que la création syntagmatique, par exemple, représente environ 60 % de la nouvelle terminologie créée en français contemporain.

3. Méthodologie

Cette partie du présent mémoire est consacrée à la présentation de la méthodologie de notre travail. Nous avons commencé par sélectionner le domaine d'étude et constituer un corpus de textes. Ce corpus a été utile pour nous aider à comprendre le domaine, à sélectionner les textes que nous allons traduire dans la partie pratique et à déterminer les concepts et les termes dont se compose notre glossaire bilingue. Les fiches terminologiques ont ensuite été développées et une arborescence de domaines a été construite. Nous décrirons en détail la méthodologie que nous avons utilisée dans les parties qui suivent en l'appliquant aux fondements théoriques précités.

3.1. Domaine

Il faut préciser et délimiter toujours le domaine auquel le travail s'appliquera avant de commencer un travail de terminologie. Cela permet de sélectionner les documents nécessaires à la composition du corpus afin de mieux appréhender le sujet. Il permet également de définir les termes qui apparaîtront dans le glossaire et les fiches terminologiques, ainsi que la description des liens entre les concepts qui composent le domaine.

Delavigne affirme que le domaine est « un des trois éléments du trépied sur lequel repose la terminologie » et les termes reçoivent leur signification par rapport à leur appartenance à un domaine (Delavigne 2002 : 2). Le domaine est une « sphère spécialisée de l'expérience humaine » (Boutin-Quesnel et al. 1985 : 20) qui nous permet de mieux situer un concept et éviter la polysémie.

Puisqu'il n'y a pas de domaine entièrement fermé, délimiter un domaine peut souvent être difficile. Certaines disciplines peuvent partager des concepts en raison de leurs intersections et influences. De plus, le même terme parfois peut désigner des concepts différents dans diverses spécialités. Précisément pour cette raison, il est important d'indiquer le domaine décrit dans lequel se situe le terme afin d'éviter la confusion.

Chaque domaine peut être divisé en plusieurs sous-domaines, qui peuvent eux-mêmes être divisés en sous-sous-domaines, etc. Le domaine sous étude de notre travail sont les mathématiques. Entre les scientifiques, il n'y a pas d'accord si la mathématique est une discipline indépendante de la logique ou si la mathématique est basée sur la logique. Néanmoins, avec la montée de formalisme dans la logique « La logique classique devient une structure mathématique, capable de se développer sans faire référence, en principe, à une interprétation philosophique » (Matías Osta Vélez, 2014 : 52). Cependant, on va prendre la perspective de Gottlob Frege dans *Les Fondements de l'arithmétique* (1884) et prétendre que la discipline qui traite des mathématiques est la logique : «Science relative aux processus de la pensée rationnelle (induction, déduction, hypothèse p. ex.) et à la formulation discursive des vérités. » (CNTRL, logique). D'autre part, selon CNTRL, la mathématique au singulier est « nom générique pour désigner l'ensemble des différentes sciences mathématiques. ». La définition au pluriel est celle qui est plus générale: « Ensemble des disciplines qui procèdent selon la méthode déductive et qui étudient les propriétés des êtres abstraits comme les nombres, les figures géométriques ainsi que les relations qui existent entre eux. » (CNTRL). En plus, la logique mathématique, qui fait une grande partie du raisonnement dans l'article, doit aussi être défini: « Étude des notations purement formelles assignées aux concepts et visant à établir un système de relations symboliques exprimant l'inclusion, la disjonction, l'implication et la transformation d'ensembles » (CNTRL).

Le (premier) théorème d'incomplétude de Gödel est l'une des bases de la logique mathématique. Cette découverte, qui a été démontrée en 1931, représente un changement fondamental dans la perspective de la logique mathématique. En fait, depuis le milieu du XIXe siècle, les logiciens ont cherché des piliers d'où dériver toutes les mathématiques (Cégielski, 2016 : 3). Les mathématiciens et logiciens les plus influents de ce temps, Bertrand Russell et Alfred North Whitehead, ont essayé de trouver ces piliers dans leur œuvre gigantesque de 1907 pages *Principia Mathematica* (1910). Mais, en prouvant que tout système formel "assez puissant" accepte inévitablement une proposition sans preuve ni réfutation, Gödel a conclu ce projet. On prétend qu'une telle affirmation est discutable. Parce qu'une nouvelle assertion indécidable émergerait inévitablement à chaque nouvelle tentative, les fondements des mathématiques ne pourraient jamais être prouvés avec certitude. La logique est donc devenue un outil pour comprendre les restrictions qu'une approche mathématique impose à notre capacité à analyser toute réalité.

Les résultats de ses théorèmes ne sont pas négligeables. Donc nous avons choisi ce domaine parce qu’avec Gödel, une nouvelle étape de mathématique et de logique est abordée.

3.2. Corpus

Nous sommes prêts à commencer à construire le corpus après avoir défini le domaine d'étude. Le corpus est un « ensemble limité de textes servant de base à une analyse terminologique » (Pavel et Nolet 2001 : 106). Cependant, les corpus contiennent d'autres informations utiles, telles que des informations sur le sens des termes, des variantes terminologiques, des indices de relations taxonomiques, conceptuelles ou méronymiques, des synonymes, des co-hyponymes ou des antonymes, des termes cooccurrents, etc. Les textes spécialisés du corpus apportent la preuve de l'existence des termes, de leur utilisation par des spécialistes, et renseignent sur leur fréquence d'utilisation (L’Homme 2004 : 4).

Afin d'assurer l'exactitude de la recherche, il est crucial de choisir des textes qui reflètent le plus possible le domaine spécifié dans chacune des langues pertinentes pour la description. De plus, il est important de considérer la langue de rédaction (il ne devrait pas s'agir de traductions), le niveau de spécialité, le type de document, la date de publication, les informations d'évaluation, etc. (ibid.).

Un corpus spécialisé multilingue, bilingue ou monolingue est possible. Il existe deux types différents de corpus bilingues ou multilingues : les corpus alignés, où une moitié est la traduction de l'autre, et les corpus comparables, où « deux collections de textes (ou plus) présentant des caractéristiques communes » sont combinées (ibid.).

Nous avons basé la sélection des textes qui composent notre corpus sur les critères établis par L'Homme que nous avons déjà mis en évidence. En d'autres termes, nous avons cherché à créer un corpus composé des textes originaux, divers, puisés dans des sources de longueurs différentes, récentes et vérifiées. Les documents écrits par des spécialistes pour des spécialistes (très techniques) et les textes écrits par des spécialistes pour des non-spécialistes sont les deux niveaux de spécialisation que nous avons choisis.

Parmi les documents sélectionnés figurent des articles scientifiques, mémoires de master, thèses de doctorat, chapitres des livres spécialisés en logique. La liste complète de textes consultés se trouve à la fin de ce travail.

3.3. Traduction

Nous avons choisi les textes pour la traduction à partir du corpus en langue française. Souhaitant montrer la preuve des théorèmes d'incomplétude de Gödel dans une manière contemporaine, nous avons choisi le texte de l'année 2016.

Le texte est un article scientifique écrit par Jérôme Fortier, paru en 2016 dans le bulletin de *L'association mathématique du Québec* du *Département de mathématiques et de statistique, Université d'Ottawa*, sur le preuve moderne des théorèmes d'incomplétude de Gödel. Il s'agit d'un texte écrit par et pour des spécialistes.

3.4 Glossaire

La création d'un glossaire est la phase suivante de notre effort. Le glossaire est une liste de mots utilisés dans un domaine particulier par ordre alphabétique. Il peut être multilingue ou monolingue.

Le terminologue peut extraire manuellement les termes d'un corpus, bien que les extracteurs de termes rendent aujourd'hui cette procédure plus rapide. L'utilisateur est censé avoir accès aux termes du corpus par le biais de ces applications. Ils présentent encore de graves défauts : ils produisent du bruit (candidats non pertinents) et du silence (candidats non identifiés), nécessitant l'intervention de l'utilisateur (CST 2014 : 99-100). Pour cette raison, on dit que « les extracteurs ramènent des candidats-termes, à savoir des mots ou des suites de mots qui sont susceptibles d'être des unités terminologiques » (L'Homme 2004 : 6), donc il faut tenir compte que les résultats fournis par les extracteurs ne constituent pas un produit fini et qu'il est nécessaire de continuer le dépouillement manuellement.

Il s'agit en l'occurrence d'un glossaire bilingue français-croate, organisé dans l'ordre alphabétique, rassemblant les termes relatifs à la logique et mathématique. Les termes sont présentés dans leur forme de base, accompagnés d'informations grammaticales (catégorie, genre) et suivis du terme équivalent en croate. Comme attendu, la plupart des termes sont de nature nominale.

Afin d'obtenir une liste des termes pour notre glossaire, nous avons utilisé Sketch Engine, pour faciliter l'extraction des termes pertinents. Grâce à son algorithme, Sketch Engine nous propose des candidats-termes (constitués d'un mot ou plusieurs mots) utilisés dans le corpus et c'est à nous de les analyser et organiser dans le système terminologique du domaine.

1	gödelov broj
2	deduktivna teorija
3	gödelov teorem
4	prirodan broj
5	sama teorija
6	niz formula
7	dokaz nepotpunosti
8	gödelov dokaz
9	dokaz konzistentnosti
10	element jezika
11	nelogički element
12	imati gödelov broj
13	löbov teorem
14	richardov paradoks
15	konzistentnost teorije
16	formula oblika
17	logička posljedica
18	prost broj
19	moći re
20	formula s gödelovim brojem
21	formalno demonstrirati
22	sadržati odgovarajuća propozicija
23	teorem o potpunosti
24	gödelov rečenica
25	odgovarajuća propozicija
26	značiti da stroj
27	izraz oblika
28	skup aksioma
29	moći formalno
30	cijel broj
31	uvijek sadrži
32	teorija brojeva
33	stoga možemo
34	empirijska situacija
35	logi ko-matemat
36	struktura prirodnih brojeva
37	löbov uvjet
38	rimanovski geometrija
39	nelogički element jezika
40	sintakti ki
41	gödelov teorem o potpunosti
42	metamatematički iskaz
43	fregeov pravilo
44	formula s brojem
45	broj formule

168	matemati ke istine
169	govoriti o ω-nesuvislosti
170	broj operacija s formulama
171	gödela zadržava
172	dobiti prazan znak
173	metamatemati ko svojstvo
174	metateoriti aritmetike
175	gödelov broj formule
176	broj rečenice
177	gödelov broj niza
178	množiti tre
179	gödelov broj rečenice
180	moderan razvoj temelja
181	sva ostala izjava krećana
182	pojedini prirodan broj
183	uočiti da ključna p-rečenica
184	zaključiti da upotrebom
185	gödelov glavni zaključak
186	akt u porabi
187	staviti pou
188	gödelov otkriće nepotpunosti
189	gödelov pridruživanje
190	skupa aritmetički aksiom
191	svojstvo izraza u računu
192	gödelov propozicija
193	gödelov rad
194	teorem da konzistentnost teorije
195	dodavati sljede
196	nazivlje gödelov broj
197	vrijediti sljedeća ekvivalencija
198	nedokazivost gödelove rečenice
199	gödelovim po
200	gödelove razmatranja
201	henkinov problem
202	sam na kona
203	hijerarhizirati teorija
204	u cijelosti spomenuti
205	nekoliko temeljno svojstvo
206	hilbertov ideja
207	dokaz rečenice
208	hilbertov program opravdavanja
209	teorija abelovih grupa
210	neodlučiva formula
211	cantorov problem
212	ideja o finitisti kome

1	gödelov
2	gödel
3	aritmetika
4	deduktivan
5	nepotpunost
6	teorem
7	aksiom
8	dokažljiv
9	propozicija
10	aritmetički
11	indd
12	konzistentnost
13	poucak
14	aritmeti
15	tarski
16	utm
17	aritmet
18	dokaziv
19	metamatematički
20	metamatemati
21	fregeov
22	dokazivost
23	löbov
24	aritmetiti
25	dijagonalizacija
26	frege
27	principia
28	sb
29	metamatemat
30	gödelovi
31	nedokažljiv
32	sintakt
33	suvislost
34	matemati
35	hilbert
36	konzistentan
37	aritmeta
38	p-rečenica
39	samoreferiranje
40	metamatematika
41	rekurzivan

126	px
127	neistinit
128	ω-inkonzistentan
129	filozoficzny
130	protupostav
131	ydx
132	metamatematička
133	dijagonaliziranje
134	dvomjestan
135	monatshefte
136	strogoti
137	axiome
138	aritmetizacija
139	etchemendy
140	gödelovo
141	ist1
142	finitistički
143	barwise
144	logischen
145	jednomjesni
146	numeral
147	ist0
148	smullyan
149	kripkeov
150	epimenid
151	finitan
152	unaran
153	semanta
154	philosophy
155	kontrapozicija
156	peanov
157	protuslovlja
158	supstituiranje
159	rugjer
160	beskon
161	opovrgljiv
162	principi
163	nedokazivost
164	ljivost
165	konstruktivist
166	print

Parmi les suggestions qu'on voit dans les tableaux il y a des expressions qui ne sont pas les mots, et encore moins les termes, mais néanmoins, Sketch Engine nous a beaucoup aidé en simplifiant le processus d'extraction des termes.

3.5 Fiches terminologiques

La fiche terminologique représente un « support sur lequel sont consignées, selon un protocole établi, les données terminologiques relatives à une notion » (Boutin-Quesnel et al. 1985 : 28). Elle vise à « permettre à l'usager qui la consulte de bien comprendre le concept qu'on y décrit et d'utiliser adéquatement les termes qui désignent ce concept » (Francœur 2015 : 24). D'après Dubuc (2002 : 82), c'est la « véritable base du travail terminologique ».

Un concept unique et la phrase qui le décrit sont décrits en détail dans la fiche terminologique. Selon les demandes de l'utilisateur, une fiche terminologique peut contenir des quantités variables d'informations. Il peut être relativement simple et inclure simplement le terme, ses traductions dans d'autres langues, une source et une mention du domaine, mais il est souhaitable de disposer des informations les plus complètes. Cependant, il ne doit pas non plus être surchargé, car cela le rend plus difficile à comprendre et, plus tard, à maintenir. Par conséquent, il faut garder une harmonie entre les deux.

La nature des fiches peut être prescriptive, c'est-à-dire qu'est respecté le principe de biunivocité (une seule notion par terme, un seul terme par notion), ou descriptive, c'est-à-dire que sont pris en compte tous les termes et les variantes en usage et que le contenu de la fiche est orienté vers la traduction (ibid.). L'approche que nous avons décidé de suivre est l'approche descriptive.

Nous voudrions aussi mettre en évidence l'importance de la définition terminographique, la « pièce maîtresse de la fiche terminologique » (Francœur 2015 : 28). Il existe plusieurs types de définition, mais dans la terminologie la plus courante et préférable est la définition par compréhension. Elle situe la notion dans une classe d'objets et inclut les caractères distinctifs propres à cette notion pour la distinguer des notions connexes. Selon Vézina et al. (2009 : 12-16), elle devrait suivre les principes suivants :

- principe de concision (être brève et sans redondances),
- principe de clarté (ne pas être ambigüe),
- principe d'explicitation et d'adéquation (énoncer avec précision les

caractères essentiels du concept défini et ne s'appliquer qu'à lui seul),

- principe de substitution (le terme et la définition théoriquement peuvent se remplacer l'un l'autre),
- principe de non-tautologie (ne pas se résumer à des termes identiques ou équivalents qui ne disent rien de plus que le terme défini),
- principe de généralisation et d'abstraction (définir un concept sans s'attacher à une représentation familière de rédacteur, ne pas particulariser le concept d'un point de vue spatial, temporel, personnel ou contextuel et être neutre et objective),
- principe d'adaptation aux groupes cibles (correspondre aux savoirs et besoins des lecteurs à qui elle s'adresse),
- principe de prévisibilité (refléter la place qu'occupera le concept dans un système conceptuel).

Dans la partie pratique de notre travail nous allons présenter 10 fiches terminologiques qui donnent des informations détaillées sur les notions et les termes qui y sont décrits. Elles contiennent les catégories suivantes : terme, sigle, catégorie grammaticale, source, domaine, sous-domaines, définition, synonymes, hyperonyme, hyponymes, et contexte. Elles comportent également l'équivalent en croate et un contexte le concernant. Tous les termes qui y figurent appartiennent au domaine de la mathématique et de la logique.

3.6 Arbre de domaine

La construction de l'arborescence des domaines est la dernière étape de notre travail terminologique. L'arbre de domaine, aussi appelé arborescence, est la « représentation sous forme d'arbre des parties constituant un domaine d'activité » selon Pavel et Nolet (2001 : 113). Dans le domaine concerné, il montre les relations hiérarchiques entre les idées (hyperonymie, hyponymie et isonymie). Il existe deux types différents d'arborescences, selon la terminologie : l'arborescence verticale, dont le sommet se trouve au point le plus haut du diagramme, et l'arborescence horizontale, dont le sommet se trouve à l'extrême gauche de la page (Zafio 1985 : 164).

Un arbre de domaine est très utile dans la terminologie parce qu'il « permet, d'un seul coup d’œil, d’embrasser tout un champ lexical, de visualiser les relations entre les différentes notions » (ibid. : 168). Il contribue donc à une meilleure compréhension du domaine.

Afin de dénombrer toutes les notions pertinentes et les intégrer d’une manière cohérente, le terminologue doit tout d’abord bien se familiariser avec le domaine sous étude. Notre mémoire propose un arbre de domaine qui contient des notions liées à la logique que nous avons jugées les plus pertinentes et qui figurent dans le corpus que nous avons constitué.

4.0 Partie pratique

4.1. Le texte original et sa traduction

1 Introduction	1 Uvod
Un objectif important de la formation universitaire d'un scientifique au premier cycle est de façonner la conception que celui-ci aura de sa science. Pour ce faire, on lui enseigne les fondements de chacune des principales branches de celle-ci. Dans le cas des mathématiques, cela correspond à établir des bases solides en algèbre, en analyse, en calcul différentiel et intégral, en géométrie, en probabilités, en logique et ainsi de suite. Chacune de ces disciplines admet un ou quelques théorèmes fondamentaux que le mathématicien a le devoir de connaître. Or, la connaissance mathématique étant construite sur des preuves, connaître un résultat exige donc d'avoir une assez bonne idée de sa preuve.	Važan dio sveučilišnog preddiplomskog obrazovanja budućih znanstvenika je oblikovanje predodžbe koju će imati o znanosti kojom se bavi. Da bi se to učinilo, poučava ga se osnovama svake od njezinih glavnih grana. U slučaju matematike, to znači uspostavljanje čvrstih temelja u algebri, analizi, diferencijalnom i integralnom računu, geometriji, vjerojatnosti, logici i tako dalje. Svaka od ovih disciplina zahtijeva jedan ili nekoliko temeljnih teorema koje matematičar mora znati. A, budući da je matematičko znanje izgrađeno na dokazima, poznavanje rezultata tih dokaza zahtijeva njihovo dobro razumijevanje.
L'un des résultats fondamentaux de la logique mathématique est le (premier) théorème d'incomplétude de Gödel. Démontré en 1931, ce résultat marque un changement radical de point de vue en logique mathématique. En effet,	Jedan od temeljnih rezultata matematičke logike je Gödelov (prvi) teorem o nepotpunosti. Dokazan 1931. godine, ovaj teorem označava radikalnu promjenu gledišta u matematičkoj logici. Zapravo, od sredine devetnaestog stoljeća

depuis la moitié du XIXe siècle, les logiciens s’employaient à trouver des fondations inébranlables à partir desquelles toutes les mathématiques pourraient être déduites. Gödel mit fin à ce projet en démontrant que toute théorie mathématique « raisonnablement puissante » admettait nécessairement un énoncé sans preuve ni réfutation. Un tel énoncé est dit indécidable. Les fondements des mathématiques ne pourraient donc jamais être établis définitivement car un nouvel énoncé indécidable surgirait inévitablement à chaque nouvelle tentative. La logique est alors plutôt devenue un outil pour comprendre les limites qui sont imposées à notre analyse de tout phénomène par une approche mathématique.	logičari su radili na pronalaženju čvrstih temelja iz kojih bi se mogla izvesti sva matematika. Gödel je onemogućio ova nastojanja dokazujući da svaka "dovoljno jaka" matematička teorija nužno daje propozicije koje se ne mogu dokazati niti negirati. Za takvu se propoziciju kaže da je neodlučiva. Temelji matematike stoga se nikada ne bi mogli definitivno utvrditi jer bi se sa svakim novim pokušajem neizbježno pojavila neodlučiva propozicija. Logika je time postala alat za razumijevanje ograničenja koja su matematičkim pristupom nametnuta našoj analizi bilo kojeg fenomena.
Mon opinion est qu’un résultat d’une importance aussi capitale mériterait que tout mathématicien ait une assez bonne idée de sa preuve. En voici une esquisse. Il s’agit de démontrer l’indécidabilité de l’énoncé suivant :	Moje mišljenje je da bi rezultat ovakvog važnog istraživanja zavrijedio da svaki matematičar ima dobro razumijevanje njegovog dokaza. Evo jedne skice. Cilj je pokazati neodlučivost sljedeće propozicije:
γ = « L’énoncé γ n’est pas démontrable. »	γ = “Propozicija γ nije dokaziva. »
On établit d’abord que γ ne peut pas être démontré. Supposons, au contraire, qu’on puisse démontrer γ. Puisqu’une démonstration doit	Najprije utvrđujemo da se γ ne može dokazati. No, pretpostavimo da možemo dokazati γ. Budući da dokaz mora utvrditi istinu o toj

établir une vérité, γ doit donc être vrai. Il est ainsi vrai de dire que γ n'est pas démontrable, ce qui contredit notre hypothèse.	propoziciji, γ mora biti istinito. Stoga slijedi da se γ ne može dokazati, što je u suprotnosti s našom pretpostavkom.
Peut-on alors réfuter formellement l'énoncé γ ? Cela signifierait que sa négation, dénotée ¬γ, serait démontrable et donc vraie. Or, ¬γ nous dit que γ est démontrable. Mais γ ne peut être à la fois démontrable et réfutable, car la logique qu'on emploie serait alors contradictoire, ce qui n'est évidemment pas souhaitable. On a donc trouvé une autre contradiction. Il faut donc en conclure que γ n'est ni démontrable, ni réfutable.	Možemo li onda formalno negirati propoziciju γ? To bi značilo da bi njezina negacija, označena kao ¬γ, bila dokaziva i stoga istinita. Međutim, ¬γ nam govori da je γ dokazivo. Ali γ ne može biti istovremeno dokazivo i opovrgljivo, jer bi logika koju koristimo tada bila proturječna, što ne želimo. Tako je dokazana još jedna kontradikcija. Stoga moramo zaključiti da γ nije ni dokazivo ni opovrgljivo.
Voilà donc une preuve du théorème de Gödel concise et à la portée de tous. On peut choisir de s'en contenter, ou alors on peut pousser la réflexion plus loin et en formuler plusieurs objections. La plus sérieuse de ces objections est peut-être la suivante. Il semble s'agir du même argument que celui de Russell, utilisé pour démontrer que la théorie dite naïve des ensembles était contradictoire. La contradiction surgit dès qu'on considère l'ensemble R de tous les ensembles X qui ne sont pas un élément de X (alors R ∈ R si et seulement si R /∈ R). L'ensemble R ainsi défini est en fait un élément pathologique comme l'énoncé γ, qui contredit sa	Dakle, ovo je sažet i svima dostupan dokaz Gödelovog teorema. Možemo se njime zadovoljiti ili dublje promisliti i pokušati odgovoriti na nekoliko prigovora. Čini se da je najrelevantniji prigovor ovaj: to je isti argument koji je Russell upotrijebio da pokaže da je takozvana naivna teorija skupova kontradiktorna. Kontradikcija nastaje čim razmotrimo skup R svih skupova X koji nisu element od X (tada je R ∈ R ako i samo ako je R /∈ R). Tako definiran skup R zapravo je anomalija poput iskaza γ, koji proturječi vlastitoj definiciji. No, problem s teorijom skupova nije bio u tome što je sama matematika

propre définition. Or, le problème avec la théorie des ensembles n'était pas que les mathématiques elles-mêmes étaient contradictoires, mais plutôt que le principe de compréhension (qui autorise, pour toute propriété P , de définir l'ensemble de tous les objets vérifiant cette propriété P) était faux. Les mathématiciens ont toutefois réussi à réparer cette faille de la théorie des ensembles par diverses considérations techniques visant, entre autres, à interdire à un ensemble de se référer à lui-même. Il est ainsi devenu impossible de définir formellement l'ensemble R, tout en préservant l'utilité et l'attrait intuitif de la notion d'ensemble.	bila kontradiktorna, već u tome što je načelo razumijevanja koje dopušta (za bilo koje svojstvo P) definiciju skupa svih objekata (koji ovjeravaju to svojstvo P) bilo pogrešno. Međutim, matematičari su uspjeli popraviti ovu grešku u teoriji skupova raznim tehničkim razmatranjima čiji je cilj bio, između ostalog, onemogućiti da skup sam sebi može biti referent. Time je postalo nemoguće formalno definirati skup R, a da se očuva korisnost i intuitivna privlačnost pojma skupova.
L'objection est donc celle-ci : qu'est-ce qui nous empêche d'en faire autant avec la logique ? Ce qui nous permet de formuler l'énoncé γ n'est-il pas simplement qu'on traite le mot « logique » de façon trop naïve ? Pourquoi un mathématicien astucieux ne pourrait-il pas définir une notion de logique assez souple pour être utilisée de façon intuitive, tout en interdisant formellement aux énoncés de se référer à eux-mêmes, de sorte que l'énoncé γ serait, comme l'ensemble R, inadmissible ?	Dakle, prigovor je sljedeći: što nas sprječava da to isto učinimo s logikom? Nije li ono što nam omogućuje da dokažemo propoziciju γ jednostavno posljedica naivnog odnosa prema logici? Zašto matematičari nisu mogli definirati pojam logike dovoljno fleksibilno kako bi se mogao rabiti intuitivno, zabranjujući propozicijama da se odnose same na sebe, tako da bi propozicija γ bila (kao i skup R) nedopustiva?
Gödel répond à cette objection en montrant que γ équivaut à un énoncé arithmétique élémentaire, c'est-à-dire une propriété des nombres naturels qui peut être formulée avec des opérations arithmétiques de base. Dès lors	Gödel na ovaj prigovor odgovara pokazujući da je γ ekvivalent elementarnoj aritmetičkoj propoziciji, to jest svojstvu prirodnih brojeva koje se može formulirati osnovnim aritmetičkim operacijama. Čim logika omogući izvođenje

qu'une logique permet d'exécuter ces opérations (comme une fondation définitive des mathématiques devrait permettre de le faire), elle doit donc nécessairement permettre de formuler quelque chose d'équivalent à γ.	ovih operacija (kao što to omogućuju osnove matematike), ona nužno mora omogućiti formuliranje nečega što je ekvivalentno spomenutoj propoziciji γ.
Pour prétendre avoir une bonne idée de la preuve du théorème de Gödel, il est donc essentiel de comprendre comment on construit l'énoncé arithmétique élémentaire dont il est question. C'est là que les choses se compliquent et que la concision et la propriété d'être à la portée de tous semblent devoir disparaître.	Da bismo mogli tvrditi da imamo kvalitetnu predodžbu o dokazu Gödelovog teorema, ključno je razumjeti način na koji se konstruira elementarna aritmetička propozicija. Ovdje se stvari kompliciraju i čini se da jasnoća i čitkost teorema nestaju.
L'objectif de cet article est néanmoins de présenter une preuve concise mais satisfaisante du théorème de Gödel, présupposant seulement du lecteur qu'il sache ce qu'est une preuve (pour en avoir fait quelques-unes) et ce qu'est un programme (pour en avoir écrit quelques-uns). Car l'avantage que nous avons sur les contemporains de Gödel, c'est la place que prend l'informatique dans notre quotidien. Il n'est plus très utile de définir rigoureusement ce que sont un algorithme, un programme ou un calcul pour se faire comprendre. Or c'est là que se trouve toute la technicité des preuves du théorème de Gödel qu'on trouve dans des ouvrages classiques tels que Shoenfield (1967)	Cilj ovog članka je ipak predstaviti koncizan, ali zadovoljavajući dokaz Gödelovog teorema, pod pretpostavkom da čitatelj zna što je dokaz (zato što ih je već nekoliko i dokazao) i što je program (zato što ih je već nekoliko i napisao). Prednost koju imamo u odnosu na Gödelove suvremenike je mjesto koje računala zauzimaju u našem svakodnevnom životu. Više nije potrebno rigorozno definirati što je algoritam, program ili izračun kako bi se razumjeli. Svi se tehnički detalji Gödelovog teorema nalaze u klasičnim djelima kao što je Shoenfield (1967) gdje je posvećeno dosta pažnje definiranju formalnog pojma "izračuna" i proučavanju njegovih mehanizama da bi ga se opravdalo.

[4] : on dépense beaucoup d'efforts à définir une notion formelle de « calcul » et en étudier les mécanismes pour se convaincre qu'elle est bonne. Pourtant, ce qui importe en vue de la preuve du théorème de Gödel, c'est seulement de remarquer certaines propriétés importantes de ce qui est calculable.	Međutim, ono što je važno u pogledu dokaza Gödelovog teorema jest uočiti određena svojstva onoga što je izračunljivo.
De la même manière, si on sait reconnaître ce qui est logique, comme le savent les mathématiciens, il n'est pas très utile de définir rigoureusement plusieurs exemples de logiques formelles et de se familiariser avec les mécanismes qui leur sont propres : il suffira d'isoler certaines propriétés importantes d'une logique.	Na isti način, ako znamo kako prepoznati što je logično, kao što to znaju matematičari, nije od velike koristi strogo definirati nekoliko primjera formalne logike i upoznavati se s njihovim mehanizmima. Dovoljno je samo navesti neka važna svojstva logike.
On pourra alors démontrer rigoureusement le théorème de Gödel à la section 4. La preuve présentée ici diffère légèrement de l'originale car, contrairement à cette dernière, il s'agit d'une preuve par contradiction. En ce sens, l'apport du présent article n'est pas que pédagogique, mais aussi théorique, car il se trouve que ce choix simplifie considérablement certains détails, sans changer radicalement les idées ni la structure de la preuve originale. La preuve résultante ne sera pas totalement sans efforts (comme celle de n'importe quel théorème important), mais elle sera complète, concise et accessible.	Tako ćemo moći iscrpno dokazati Gödelov teorem u odjeljku 4. Ovdje predstavljen dokaz malo se razlikuje od izvornog jer je, za razliku od njega, to dokaz kontradikcijom. U tom smislu doprinos ovog članka nije samo pedagoški, već i teorijski, jer se pokazalo da se ovim načinom pojedini detalji znatno pojednostavljuju, a da se radikalno ne mijenjaju ideje ili struktura izvornog dokaza. Rezultirajući dokaz neće biti jednostavan (kao ni kod bilo kojeg važnog teorema), ali će biti potpun, sažet i pristupačan.

2 Informatique 2.1 La notion de calcul	2 Informatika 2.1. Pojam izračuna
L’informatique est née d’une utopie : l’idée de concevoir une machine permettant de calculer tout ce qui est calculable. Si le concept de calcul admet intuitivement un certain sens pour nous, citoyens des temps modernes, qui calculons depuis l’enfance, il fallait toutefois lui donner un sens mathématique précis afin de parvenir à l’implanter dans une machine. C’est un problème auquel quelques-uns des plus éminents logiciens des années 1930, dont Gödel, se sont intéressés.	Računarstvo je rođeno iz utopijske ideje o mogućnosti dizajniranja stroja za izračunavanje svega što se može izračunati. Iako izračun ima intuitivno značenje za nas koji računamo od djetinjstva, tom pojmu bilo je potrebno dati precizno matematičko značenje da bi ga se moglo integrirati u stroj. Za ovaj problem su se zanimali neki od najeminentnijih logičara 1930-ih, uključujući Gödela.
Ils ont trouvé trois grands modèles mathématiques assez différents (mais équivalents !) de la notion de calcul : les fonctions récursives, les machines de Turing et le λ-calcul. Il suffit de savoir qu’il s’agit de petits langages de programmation, chacun avec une procédure bien précise qui permet d’exécuter à la main les programmes qu’on y	Pronašli su tri glavna matematička modela izračuna koji su značajno različiti (ali ekvivalentni!): rekurzivne funkcije, Turingovi strojevi i λ-račun. Dovoljno je znati da se radi o malim programskim jezicima, od kojih svaki ima vrlo specifičnu proceduru koja omogućuje ručno izvođenje programa koje pišemo. Znanost o programiranju se naravno znatno razvila od

écrit. La science de la programmation a bien sûr considérablement évolué depuis les années 1930, et vu l'importance qu'a prise l'informatique dans l'activité humaine, il est désormais improbable pour un scientifique de ne pas connaître, dans une certaine mesure, au moins un langage de programmation.	1930-ih godina, a s obzirom na važnost koju je računarstvo poprimilo u ljudskoj aktivnosti, sada je malo vjerojatno da znanstvenik ne poznaje, u određenoj mjeri, barem jedan programski jezik.
On peut donc se passer des modèles classiques et résumer la notion de calcul comme suit : c'est ce qui peut être programmé dans un ordinateur. Le langage de programmation utilisé est sans importance car, en termes d'expressivité, ceux-ci s'équivalent presque tous. C'est-à-dire qu'étant donné un programme conçu dans un langage donné, on peut toujours écrire, dans un autre langage, un programme qui aurait la même fonction que le premier, la différence se manifestant seulement en termes d'efficacité. Pour simplifier les choses, on supposera tout de même que le langage qu'on utilise permet de travailler avec les structures de données suivantes : l'ensemble N des entiers naturels, le type booléen BOOL = {VRAI, FAUX} et les chaînes de caractères (sur un alphabet fini donné).	Stoga možemo zaobići klasične modele i sažeti pojam izračuna: to je ono što se može programirati u računalo. Programski jezik koji se koristi nije bitan jer su, u smislu izražajnosti, gotovo svi ekvivalentni. To znači da se program dizajniran na određenom jeziku uvijek može napisati na drugom jeziku. Imao bi istu funkciju kao prvi, a razlika bi se manifestirala samo u smislu učinkovitosti. Kako bismo pojednostavili stvari, svejedno ćemo pretpostaviti da jezik koji koristimo omogućuje rad sa sljedećim strukturama podataka: skup N prirodnih brojeva, Booleov tip BOOL = {TRUE, FALSE} i znakovni nizovi (zadana abeceda).
Le calcul, à proprement parler, est pour sa part exécuté par un ordinateur, qui suit simplement les instructions pour lesquelles on l'a programmé, sans pouvoir prendre de décisions arbitraires. Il s'agit donc d'un procédé déterministe. On peut être tenté de dire que	Izračun, strogo govoreći, izvršava računalo, koje jednostavno slijedi upute koje su u njemu programirane, bez mogućnosti donošenja proizvoljnih odluka. To je dakle deterministički proces. Neki kažu da računalo nije važnije od programskog jezika, ali u stvarnosti je to

l'ordinateur utilisé n'a pas plus d'importance que le langage de programmation, mais en réalité c'est faux : les ordinateurs récents peuvent exécuter des calculs beaucoup plus complexes que leurs semblables d'une autre époque, car ils sont plus puissants. Pour obtenir une notion théorique de ce qu'est un calcul, il faut donc faire abstraction des contraintes physiques et imaginer qu'on puisse exécuter nos programmes sur un ordinateur utopique, qui n'aurait aucune limitation en quantité de mémoire ou de temps pour mener son calcul à terme et qui serait à l'abri de toute interférence et de toute panne.	netočno: novija računala mogu izvoditi mnogo složenije izračune od starijih generacija računala zato što su mnogo snažnija. Da bismo dobili teoretsku predodžbu o tome što je izračun, moramo zanemariti fizička ograničenja i zamisliti da možemo izvršavati svoje programe na utopijskom računalu, koje ne bi imalo ograničenja u smislu količine memorije ili vremena za izvođenje svojih izračuna i koje bi bilo zaštićeno od bilo kakvih smetnji i kvara.
Il y a encore, bien sûr, la possibilité qu'un calcul donné ne se termine jamais, par exemple, si on demande à l'ordinateur d'exécuter un programme qui comprend une boucle infinie. Or, ce genre de non-terminaison est de la responsabilité du programmeur et non de l'environnement dans lequel l'ordinateur se trouve. Un programme P est dit total si son exécution (sur un ordinateur utopique) se termine en un temps fini, peu importe la valeur d'entrée qu'on donne au programme.	Još uvijek, naravno, postoji mogućnost da se određena operacija izračunavanja nikada neće završiti, na primjer, ako se od računala traži da pokrene program koji uključuje beskonačnu petlju. Međutim, za to je odgovoran programer, a ne okolina u kojoj se računalo nalazi. Kaže se da je program P potpun ako njegovo izvođenje (na utopijskom računalu) završava u konačnom vremenu, bez obzira na ulaznu vrijednost koja je dana programu.
2.1 Fonctions calculables Définition 1 Une fonction f : A → B est calculable si on peut écrire un programme qui,	2.1 Izračunljive funkcije Definicija: Funkcija f : A → B je izračunljiva ako se može napisati program koji, kada se

lorsqu'il est exécuté sur un ordinateur utopique, renvoie la valeur f (x) en temps fini, pour toute valeur d'entrée x ∈ A. Un exemple d'une fonction calculable serait la fonction f : N → BOOL définie comme suit f (n) = VRAI FAUX sinon si n est premier L'écriture d'un programme qui calcule cette fonction f est un exercice élémentaire de programmation qu'on laisse à la discrétion du lecteur.	izvrši na utopijskom računalu, vraća vrijednost f(x) u konačnom vremenu, za bilo koju ulaznu vrijednost x ∈ A. Primjer izračunljive funkcije bila bi funkcija f : N → BOOL definirana na sljedeći način f(n) = TRUE FALSE ako je n prosti broj Pisanje programa koji izračunava funkciju f je osnovna vježba programiranja koja je prepuštena čitatelju.
Combien de fonctions sont-elles calculables ? En termes de cardinalité : bien peu, car le code source du programme qui les calcule est une chaîne de caractères et les chaînes de caractères sont dénombrables (contrairement à l'ensemble des fonctions d'un type comme N → BOOL). Il n'est toutefois pas très simple de trouver une fonction particulière qui ne soit pas calculable.	Koliko je funkcija izračunljivo? U pogledu kardinalnosti: vrlo malo, jer je izvorni kod programa koji radi izračun niz znakova, a nizovi znakova su prebrojivi za razliku od skupa funkcija tipa kao što je N → BOOL. Međutim, nije lako pronaći funkciju koja nije izračunljiva.
L'objectif du présent article n'est pas de montrer que h n'est pas calculable. Peu s'en faut, tout de même, pour dire que cette preuve est analogue à celle du théorème de Gödel.	Cilj ovog članka nije pokazati da h nije izračunljiv. Svejedno se može reći da je ovaj dokaz analogan dokazu Gödelovog teorema.

2.3 Ensembles énumérables	2.3 Rekurzivno prebrojivi skupovi
Certains programmes visent d’autres objectifs que celui de renvoyer une seule valeur après un certain temps. Prenons l’exemple d’une horloge. Il serait peu pratique qu’il s’agisse d’un programme qui donne l’heure une seule fois pour ensuite se fermer. On s’attend plutôt à ce qu’il reste actif et qu’il envoie une nouvelle information à l’utilisateur de façon régulière (à chaque minute ou à chaque seconde).	Neki programi imaju drugu svrhu osim davanja određene vrijednosti nakon nekog vremena. Uzmimo primjer sata. Bilo bi nepraktično da je to program koji daje vrijeme samo jednom i zatim se zatvara. Očekuje se da ostane aktivan i redovito šalje informacije korisniku (svake minute i sekunde).
Ce genre de programme peut également servir à calculer des données infinies. Par exemple, on dira qu’un programme P énumère un ensemble A s’il sert à produire, avec le temps, une liste (an)n∈N (une énumération) d’éléments de A, dans laquelle chaque élément apparaît au moins une fois. Puisqu’il s’agit d’une liste infinie, elle ne sera jamais achevée, mais on exige seulement que le temps de production d’un nouvel élément soit toujours fini. Un ensemble A est énumérable s’il existe un programme P qui l’énumère.	Ova vrsta programa također se može koristiti za izračunavanje beskonačnih podataka. Na primjer, reći ćemo da program P nabraja skup A (an)n∈N (numeracija) i proizvodi listu elemenata od A, u kojem se svaki element pojavljuje barem jednom. Budući da je ovo beskonačan popis, on nikada neće biti potpun. Ono što zahtijevamo jest da je vrijeme proizvodnje novog elementa uvijek konačno. Skup A je rekurzivno prebrojiv ako postoji program P koji ga nabraja.

L'exemple le plus commun d'un ensemble infini énumérable est l'ensemble N des entiers naturels. Le programme qui l'énumère est l'un des premiers algorithmes qu'on apprend dans l'enfance : compter. Chaque n ∈ N sera, en principe, éventuellement nommé si on est disposé à compter assez longtemps. De façon similaire, l'ensemble des chaînes de caractères sur un alphabet fini donné est énumérable : on peut faire la liste de toutes les chaînes de longueur 1, puis de toutes les chaînes de longueur 2 (en ordre alphabétique) et ainsi de suite.	Najpoznatiji primjer beskonačnog rekurzivno prebrojivog skupa je skup N prirodnih brojeva. Program koji ga nabraja jedan je od prvih algoritama koje učimo u djetinjstvu: brojanje. Svaki n ∈ N će, u načelu, biti nabrojan ako imamo beskonačno mnogo vremena. Isto tako, skup niza znakova dane abecede je prebrojiv: mogu se navesti svi nizovi duljine 1, zatim svi nizovi duljine 2 (abecednim redom), i tako dalje.
Il est important de distinguer la notion d'ensemble énumérable de celle d'ensemble dénombrable. Les deux notions semblent traduire la même idée : un ensemble A est dénombrable s'il existe une bijection f : N → A, et la suite (f (n))n∈N ressemble alors à une énumération de A. Il est vrai que chaque ensemble énumérable est dénombrable, mais la réciproque ne l'est pas ! La nuance est qu'on exige, pour les ensembles énumérables, que la bijection f soit calculable. Puisque l'ensemble des fonctions calculables est dénombrable, alors il y a seulement une quantité dénombrable d'ensembles énumérables. Il y a toutefois beaucoup plus d'ensembles dénombrables. Par exemple, tous les membres de la collection (non dénombrable) des sous-ensembles infinis de N	Važno je razlikovati pojam rekurzivno prebrojivog skupa od pojma prebrojivog skupa. Čini se da dva pojma prenose istu ideju: skup A je prebrojiv ako postoji bijekcija f : N → A, a niz (f (n))n∈N tada nalikuje numeraciji A. Svaki rekurzivno prebrojiv skup je prebrojiv, ali ne i obrnuto! Razlika je u tome što za rekurzivno prebrojive skupove zahtijevamo da bijekcija f bude izračunljiva. Budući da je skup izračunljivih funkcija prebrojiv, tada postoji samo prebrojiv broj rekurzivno prebrojivih skupova. Postoji, međutim, mnogo više prebrojivih skupova. Na primjer, svi članovi (neprebrojivih) skupova beskonačnih podskupova od N su prebrojivi.

sont dénombrables.	
Le lemme suivant permet de construire de nouveaux ensembles énumérables Lemme 1 Soit A un ensemble énumérable et P : A → BOOL un programme total. Alors l'ensemble B := {a ∈ A | P(a) = VRAI} est énumérable.	Sljedeća lema omogućuje konstruiranje novih rekurzivno prebrojivih skupova Lema 1. Neka je A rekurzivno prebrojiv skup i P : A → BOOL potpuni program. Tada skup B := {a ∈ A | P(a) = TRUE} je rekurzivno prebrojiv.
Démonstration	Dokaz
Soit A un programme qui dresse la liste de tous les éléments de A. On va décrire un programme, disons B, qui dresse la liste de tous les éléments de B. On initialise le programme B avec une liste vide. Pour chaque élément a de la liste produite par A, on lance le programme P. Si P(a) = VRAI, le programme B rajoute l'élément a à sa liste. Sinon, il ne fait rien et passe à l'élément suivant. On énumère ainsi tous les éléments de A qui satisfont le prédicat encodé par le programme P, c'est-à-dire, tous les éléments de l'ensemble B.	Neka je A program koji ispisuje sve elemente od A. Opisat ćemo program, recimo B, koji ispisuje sve elemente od B. Pokrećemo program B s praznom listom. Za svaki element a proizveden programom A, pokrećemo program P. Ako je P(a) = TRUE, program B dodaje element a svojoj listi. U suprotnom, ne radi ništa i prelazi na sljedeću stavku. Tako nabrajamo sve elemente od A koji zadovoljavaju predikat kodiran programom P, to jest, sve elemente skupa B.
2.4 Numéros de Gödel	2.4 Gödelovi brojevi
L'une des idées clés qu'a eue Gödel afin de démontrer son théorème d'incomplétude fut celle d'encoder certaines informations sous la forme de nombres naturels. Cette idée, révolutionnaire pour l'époque, est toutefois devenue habituelle à l'ère numérique. Le mot le	Jedna od ključnih ideja koju je Gödel imao kako bi dokazao svoj teorem o nepotpunosti bilo je kodiranje određenih informacija u obliku prirodnih brojeva. Ova revolucionarna ideja postala je uobičajena u digitalnom dobu. Kaže se: u računalu je sve broj! To je zato što su

dit : dans un ordinateur, tout est un nombre ! En effet, les données de n’importe quel type (disons les chaînes de caractères) sont stockées en mémoire sous la forme d’un code binaire. Il s’agit simplement d’une chaîne finie de 0 et de 1. Or, ce type de chaîne correspond également, de façon unique, à un entier naturel : c’est, à quelques détails près, sa représentation en base deux.	podaci bilo koje vrste (recimo nizovi znakova) pohranjeni u memoriji kao binarni kod. To je jednostavno konačan niz od 0 i 1. Međutim, ova vrsta niza također odgovara, na jedinstven način, prirodnom broju. To je njegov prikaz s bazom dva.
Remarquons que la fonction $w \longmapsto [w[$ est calculable, puisque le stockage d’une donnée dans la mémoire d’un ordinateur est nécessairement effectué par un programme. Réciproquement, si un code binaire correspondant à un entier n se trouve en mémoire et si $n = [w[$ pour une certaine chaîne w, alors il doit y avoir un programme, disons P, qui permette de retrouver la chaîne w en question. Sinon, il serait impossible d’utiliser l’information mémorisée. Certains blocs de mémoire peuvent, bien sûr, ne pas provenir de la conversion d’une chaîne de caractères, mais alors le programme qui tente de reconstruire la chaîne produira, au pire, une chaîne erronée et au mieux, un signal d’erreur. Dans tous les cas, il ne bouclera pas sans fin et c’est ce qui nous importe. Il y a donc un programme total P tel que $P([w[) = w$ pour toute chaîne w.	Primijetimo da je funkcija $w \longmapsto [w[$ izračunljiva, jer pohranu podataka u memoriju računala nužno obavlja program. Isto tako, ako je binarni kod koji odgovara cijelom broju n u memoriji i ako je $n = [w[$ za određeni niz w, tada mora postojati program, recimo P, koji omogućuje pronalaženje niza w. U suprotnom, bilo bi nemoguće koristiti pohranjene informacije. Neki blokovi memorije se ne moraju temeljiti na pretvorbi niza, ali tada će program koji pokušava rekonstruirati niz proizvesti, u najgorem slučaju, pogrešan niz, a u najboljem, oznaku pogreške. U svakom slučaju, neće dati beskonačnu petlju i to je ono što je nama važno. Dakle, postoji potpuni program P takav da je $P([w[) = w$ za bilo koji niz w.

3 Logique 3.1 Systèmes formels	3 Logika 3.1 Formalni sustavi
Les systèmes formels, ci-après dénotés par la lettre L pour « logique », sont les objets auxquels s’intéressent principalement les logiciens. Un tel système est essentiellement constitué de deux composantes : des formules et des preuves.	Formalni sustavi, u daljnjem tekstu označeni slovom L za "logiku", su objekti za koje se uglavnom interesiraju logičari. Takav se sustav sastoji od dvije komponente: formule i dokaza.
Gödel, dans son article, démontre son théorème pour un système inspiré de ceux qui étaient en vogue à son époque. Il précise toutefois que « [c]ette situation n’est d’aucune façon causée par la nature particulière choisie pour ces systèmes mais demeure vraie pour une grande classe de systèmes formels » (traduction libre depuis van Heijenoort (1967) [6]). Il explique par ailleurs quelles sont les propriétés importantes des logiques considérées : « Les formules d’un système formel [...] sont des suites finies de symboles primitifs [...] et il est facile de déterminer avec une précision complète quelles suites de symboles primitifs sont des formules sensées et lesquelles ne le sont pas. Similairement, les preuves, d’un point de vue formel, ne sont rien que des suites finies de formules (avec certaines propriétés spécifiques). » (traduction libre encore depuis van Heijenoort (1967) [6]). Dans le but de bien illustrer l’universalité du théorème de Gödel, c’est donc directement avec cette description générale	Gödel u svom članku prikazuje svoj teorem za sustav inspiriran onima koji su bili popularni u njegovo vrijeme. On međutim precizira da "ova situacija ni na koji način nije uzrokovana posebnom prirodom odabranom za ove sustave, ali ostaje istinita za veliku klasu formalnih sustava" (slobodan prijevod van Heijenoorta (1967)). Također objašnjava koja su važna svojstva razmatranih logika: "Formule formalnog sustava [...] su konačni nizovi primitivnih simbola [...] i lako je s potpunom preciznošću odrediti koji nizovi primitivnih simbola su smislene formule, a koje nisu. Slično tome, dokazi, s formalne točke gledišta, nisu ništa drugo nego konačni nizovi formula (s određenim specifičnim svojstvima)“ (slobodan prijevod van Heijenoorta (1967)). Kako bismo jasno ilustrirali univerzalnost Gödelovog teorema, raditi ćemo s ovim općim opisom, a ne s određenim sustavom.

qu'on travaillera, plutôt qu'avec un système particulier.	
En terminologie informatique, les formules d'un système formel L sont donc des chaînes de caractères conçues pour exprimer les propriétés de certains objets mathématiques ; elles peuvent donc être ou bien vraies, ou bien fausses. L'idée est que les formules sont les phrases syntaxiquement correctes, ou expressions bien formées, d'un langage symbolique.	U računalnoj terminologiji, formule formalnog sustava L su stoga znakovni nizovi dizajnirani da izraze svojstva određenih matematičkih objekata; stoga mogu biti istiniti ili lažni. Ideja je da su formule sintaktički ispravne rečenice ili dobro oblikovani izrazi simboličkog jezika.
On exige donc d'un système formel L que l'ensemble F de ses formules soit bien défini. C'est dire qu'on doit spécifier un programme qui prend en entrée une chaîne de caractères et qui permet de déterminer, en un temps fini, si cette chaîne est une formule ou pas. Notons que puisque l'ensemble des chaînes de caractères est énumérable, alors par le Lemme 1, cette exigence entraîne que l'ensemble F est énumérable à son tour.	Stoga očekujemo od formalnog sustava L da skup F njegovih formula bude dobro definiran. To znači da moramo napisati program koji uzima niz znakova kao unos i koji će nam omogućiti odrediti (u određenom vremenu) je li taj niz znakova formula ili ne. Budući da je skup nizova znakova prebrojiv, prema lemi 1, ovaj zahtjev implicira da je skup F rekurzivno prebrojiv.
Typiquement, les formules sont définies par récurrence, avec un alphabet symbolique assez restreint. Il en résulte un programme très simple pour déterminer si une chaîne de caractères donnée est une formule : ce programme n'a qu'à vérifier la syntaxe. Mais on pourrait aussi, par	Formule se obično definiraju ponavljanjem, s prilično ograničenom simboličkom abecedom. Rezultat je vrlo jednostavan program za utvrđivanje je li zadani niz znakova formula. Program samo mora provjeriti sintaksu. Ali također bismo mogli, na primjer, koristiti

exemple, utiliser la grammaire française comme syntaxe, quitte à y assortir des expressions algébriques. Le programme qui accompagnerait un tel système s'apparenterait alors à un vérificateur orthographique et grammatical comme celui d'Antidote ou de Microsoft Word.	francusku gramatiku kao sintaksu, čak i ako to znači njeno usklađivanje s algebarskim izrazima. Program koji bi pratio takav sustav tada bi bio sličan alatu za provjeru pravopisa i gramatike poput onoga u Antidoteu ili Microsoft Wordu.
Mais comment détermine-t-on qu'un énoncé donné est vrai ou qu'il est faux ? En effet, un système formel ne doit pas servir qu'à énoncer des propositions : il doit être muni d'un mécanisme qui permette de démontrer certaines d'entre elles. C'est ce qui nous conduit à la notion de preuve.	Ali kako odrediti je li neka propozicija istinita ili lažna? Formalni sustav se zapravo ne smije koristiti samo za iznošenje propozicija: on mora biti opremljen mehanizmom koji omogućuje prikaz nekih od njih. To nas dovodi do pojma dokaza.
Les preuves d'un système L sont constituées d'une succession logique de formules, le présent sens du mot « logique » étant précisé par le système en question. Sans perte de généralité, les preuves peuvent être amalgamées en une chaîne de caractères, comme un texte est un amalgame de phrases. Comme pour les formules, on exige donc que L soit accompagné d'un programme qui vérifie, étant donné une chaîne de caractères, s'il s'agit bien d'une preuve valide, auquel cas ce programme doit aussi pouvoir déterminer quelle est la conclusion (un énoncé) que cette preuve démontre. Si un énoncé φ s'avère être la conclusion d'une preuve valide, on dit qu'il s'agit d'un théorème du système L, ou encore, que L démontre φ.	Dokazi sustava L sastoje se od logičkog slijeda formula, pri čemu je sadašnje značenje riječi "logičan" određeno dotičnim sustavom. Bez gubitka općenitosti, dokazi se mogu spojiti u niz znakova, baš kao što je tekst spoj rečenica. Što se tiče formula, L mora biti popraćen programom koji provjerava zadani niz znakova te je li on doista valjan dokaz. U tom slučaju, ovaj program također mora moći odrediti koji je zaključak (propozicija) koji dokaz prikazuje. Ako se propozicija φ pokaže kao zaključak valjanog dokaza, kažemo da je to teorem sustava L, ili opet, da L dokazuje φ.

Cette exigence est satisfaite par tous les systèmes abstraits définis par des logiciens. En effet, les preuves y sont généralement définies par récurrence : on commence par les preuves les plus élémentaires (qui consistent à énoncer simplement des axiomes), puis les autres preuves sont obtenues en utilisant des règles de déduction (admises comme étant correctes) à partir de théorèmes déjà avérés par une preuve plus élémentaire. Il ne s’agit donc encore que de regarder si la syntaxe est respectée.	Ovaj zahtjev zadovoljavaju svi apstraktni sustavi koje su definirali logičari. Zapravo, do dokaza se uglavnom dolazi indukcijom: počinjemo s najelementarnijim dokazima (koji se sastoje od jednostavnog navođenja aksioma), zatim se ostali dokazi dobivaju korištenjem pravila dedukcije (koja se priznaju kao točna) iz već dokazanih teorema pomoću elementarnijeg dokaza. Stoga je još uvijek jedino pitanje: poštuje li se sintaksa?
C’est essentiellement le même procédé qui guide la recherche en mathématiques. Un chercheur propose un article à un éditeur qui doit décider de le publier ou non. Ce dernier mandate donc des arbitres pour vérifier l’article. Ceux-ci lisent l’article et s’assurent notamment que les déductions logiques qui s’y trouvent sont correctes et qu’elles reposent sur des théorèmes déjà admis. Chaque arbitre remet alors un rapport dans lequel il énonce, entre autres, le théorème qui fut démontré, si c’est bien le cas. La vérification est donc faite par des humains plutôt que par des ordinateurs, mais ceux-ci suivent, en principe, un programme : chaque manuel de mathématiques renferme une parcelle de son code source.	To je u biti isti postupak poput onog kojem se vode istraživanja u matematici. Istraživač predaje članak uredniku koji mora odlučiti hoće li ga objaviti ili ne. Urednik stoga daje u zadatak ostalim istraživačima da provjere članak. Oni se moraju uvjeriti da su logični zaključci u njemu točni i da se temelje na već prihvaćenim teoremima. Svaki istraživač tada podnosi izvješće u kojem između ostalog navodi i dokazani teorem, ako je to doista tako. Provjeru stoga obavljaju ljudi, a ne računala, no oni u načelu slijede program: svaki udžbenik matematike sadrži fragment svog izvornog koda.

Proposition 1 Soit L un système formel. Alors l’ensemble des théorèmes de L est énumérable.	Propozicija 1 Neka je L formalni sustav. Tada je skup teorema od L rekurzivno prebrojiv.
Démonstration On procède de façon similaire au Lemme 1 pour décrire un programme, Thm, qui construit progressivement la liste de tous les théorèmes de L. On initialise le programme avec une liste vide.	Dokaz Nastavljamo na sličan način kao u lemi 1 da bismo opisali program, Thm, koji postepeno pravi popis svih teorema iz L. Pokrećemo program s praznim popisom.
On a déjà vu que l’ensemble de toutes les chaînes de caractères était énumérable. Sur chaque élément de la liste des chaînes de caractères, on peut donc lancer le programme qui détermine si cette chaîne représente une preuve et qui, le cas échéant, trouve sa conclusion. Chaque fois que ce programme trouve une conclusion, qui est donc un théorème de L, le programme Thm rajoute celle-ci à sa liste. Sinon, il ne fait rien et passe à la chaîne suivante.	Već smo vidjeli da je skup svih nizova znakova prebrojiv. Na svakom elementu liste znakovnih nizova možemo, dakle, pokrenuti program koji utvrđuje predstavlja li taj niz dokaz i koji, po potrebi, pronalazi svoj zaključak. Svaki put kada ovaj program pronađe zaključak, koji je zapravo teorem od L, program Thm ga dodaje na svoju listu. U suprotnom, ne radi ništa i prelazi na sljedeću stavku.
Puisque chaque théorème de L doit être la conclusion d’au moins une preuve, on obtient ainsi chaque théorème au moins une fois dans la liste de théorèmes produite par Thm.	Budući da svaki teorem od L mora biti zaključak barem jednog dokaza, svaki teorem dobivamo barem jednom na popisu teorema koji je proizveo Thm.
Enfin, pour pouvoir parler du théorème de	Konačno, da bismo mogli govoriti o Gödelovom

Gödel, on demande que le système dans lequel on travaille admette la négation. C'est-à-dire, que pour toute formule φ, on puisse écrire une autre formule, qu'on notera ¬φ, exprimant l'idée contraire à celle qui est exprimée par φ. On dira qu'un système formel L réfute une formule φ si L démontre ¬φ.	teoremu, tražimo da sustav u kojem radimo dopušta negaciju. To jest, za bilo koju formulu φ možemo napisati drugu formulu, koju ćemo označiti ¬φ, izražavajući ideju suprotnu od one koju izražava φ. Reći ćemo da formalni sustav L pobija formulu φ ako L dokaže ¬φ.
2. 1 Cohérence et complétude	2.1 Konzistentnost i potpunost
Définition 3 Un système L est incohérent s'il existe un énoncé φ qui est à la fois démontré et réfuté par L. Si L n'est pas incohérent, on dit qu'il est cohérent.	Definicija 3 Sustav L je inkonzistentan ako postoji tvrdnja φ koju L istovremeno dokazuje i opovrgava. Ako L nije inkonzistentan, kažemo da je konzistentan.
Il va de soi que la cohérence est une propriété souhaitable. L'une des raisons est le principe « ex falso sequitur quodlibet » (d'une contradiction découle n'importe quoi), exprimé par la tautologie propositionnelle « (φ ∧ ¬φ) ⇒ ψ » et valide dans la vaste majorité des systèmes logiques (formels ou pas) utilisés couramment. Dans un tel système, l'incohérence entraîne donc que tout se démontre trivialement, ce qui en détruit l'intérêt.	Nije potrebno spominjati da je konzistentnost poželjno svojstvo. Jedan od razloga je princip "ex falso sequitur quodlibet" (iz kontradikcije slijedi bilo što), izraženo propozicionom tautologijom "(φ ∧ ¬φ) ⇒ ψ", što vrijedi u većini logičkih sustava (formalnih ili ne) koji se svakodnevno koriste. U takvom sustavu nedosljednost dovodi do toga da se sve dokazuje trivijalno, što za njega smanjuje interes.
En effet, puisque l'ensemble des théorèmes de L est énumérable (Proposition 1), il suffit donc de faire fonctionner le programme Thm jusqu'à voir passer φ ou bien ¬φ. Le programme Dem	Budući da je skup teorema od L rekurzivno prebrojiv (Propozicija 1), dovoljno je pokrenuti program Thm dok se φ ili ¬φ ne pojave. Program Dem prati ovo nabrajanje i vraća

surveille cette énumération et renvoie VRAI dès qu'il voit passer φ et FAUX dès qu'il voit passer ¬φ. Ces deux situations ne peuvent pas toutes deux se produire pour une même instance, puisque L est cohérent.	TRUE čim vidi da se pojavljuje φ i FALSE čim vidi ¬φ. No, ovo se ne može dogoditi za isti slučaj, budući da je L konzistentan.
Il y a bien sûr une possibilité de boucle infinie dans ce programme : un énoncé donné pourrait n'être ni démontrable, ni réfutable.	Naravno, u ovom programu postoji mogućnost beskonačne petlje: dana propozicija ne može biti ni dokaziva ni opovrgnuta.
Définition 4 Un système formel L est complet si pour tout énoncé φ, ou bien L démontre φ, ou alors L réfute φ. Si L n'est pas complet, on dit qu'il est incomplet.	Definicija 4 Formalni sustav L je potpun ako za bilo koju tvrdnju φ, L dokazuje φ ili opovrgava φ. Ako L nije potpun, kaže se da je nepotpun.
Dans un système cohérent et complet, le programme Dem est donc total, puisqu'on a éliminé par hypothèse le troisième cas de figure.	U konzistentnom i potpunom sustavu, Dem program je stoga potpun, budući da je treći scenarij eliminiran hipotezom.
Les notions de cohérence et de complétude sont étroitement liées, d'abord par leur forme : la définition de l'une est duale à la définition de l'autre. Plus encore : puisqu'un système incohérent permet de démontrer n'importe quoi, alors en particulier il est complet. Le théorème de Gödel est en fait une réciproque partielle de ce fait : tout système formel cohérent et	Pojmovi konzistentnosti i potpunosti usko su povezani, najprije svojim oblikom: definicija jednog dualna je definiciji drugoga. Čak štoviše: budući da nedosljedan sustav omogućuje demonstraciju bilo čega, upravo zato je potpun. Gödelov teorem je zapravo djelomična recipročnost te činjenice: svaki dosljedan i dovoljno jak formalni sustav je nepotpun. U

suffisamment puissant est incomplet. Une nuance se cache bien sûr dans cette expression « suffisamment puissant », car il existe bel et bien des systèmes cohérents et complets. Ceux-ci ne permettent toutefois pas d'y développer l'arithmétique tout entière.	izrazu "dovoljno jak" krije se nijansa, jer doista postoje dosljedni i potpuni sustavi. Međutim, takvi sustavi ne dopuštaju razvoj aritmetike.
2.1 Représentation de l'arithmétique	2.1 Predstavljanje aritmetike
On peut imaginer la formule ⟨P ⟩ obtenue à partir du programme P dans la définition ci-dessus comme étant la traduction du code source du programme P dans le langage logique de L. Un système qui représente l'arithmétique permet donc de suivre la trace de n'importe quelle exécution d'un programme (comme on peut, en principe, le faire à la main) de sorte que cette trace tienne lieu de preuve valide dans L.	Može se zamisliti formula ⟨P⟩ dobivena iz programa P u gornjoj definiciji kao prijevod izvornog koda programa P u logički jezik L. Sustav koji predstavlja aritmetiku na taj način omogućuje praćenje traga bilo kakvog izvršavanja programa (ono što se, u načelu, može učiniti ručno) tako da ovaj trag služi kao valjan dokaz u L.
Cela revient donc à dire que L permet d'écrire suffisamment d'opérations pour en faire un langage de programmation. Pour cette raison, définir formellement un système qui représente l'arithmétique peut sembler terriblement complexe. Toutefois, certains langages de programma- tion (comme celui des fonctions récursives) reposent sur très peu d'opérations de base. Ainsi, on peut montrer que le système assez simple de l'arithmétique du premier ordre (tel que formulé, par exemple, dans Shoenfield	Ovo se dakle svodi na to da L omogućuje pisanje dovoljnog broja operacija da bi iz toga razvio programski jezik. Iz tog razloga, formalno definiranje sustava koji predstavlja aritmetiku može izgledati vrlo složeno. Međutim, neki programski jezici (poput rekurzivnih funkcija) oslanjaju se na vrlo malo osnovnih operacija. Stoga se može pokazati da prilično jednostavan sustav aritmetike prvog reda (kako ga je formulirao, na primjer, Shoenfield (1967))doista predstavlja aritmetiku

(1967) [4]) représente effectivement l'arithmétique (d'où son nom !).	(otuda joj i naziv!).
4.1 Cet énoncé n'est pas démontrable	4.1 Ova propozicija nije dokaziva
Notre objectif est donc de tirer une contradiction du fait que L permette de formuler un énoncé équivalent à celui-ci :	Naš je cilj stoga izvući kontradikciju iz činjenice da nam L omogućuje formuliranje izjave:
γ = « L'énoncé γ n'est pas démontrable ».	γ = "propozicija γ nije dokaziva".
Afin de construire un tel énoncé, il faut résoudre deux difficultés. La première est de montrer que L peut exprimer le fait qu'une formule donnée soit démontrable. En effet, à première vue, les formules de L peuvent n'être conçues que pour exprimer des propriétés des entiers naturels et non pas des propriétés des formules de L.	Da bi se konstruirala takva propozicija, moraju se riješiti dvije poteškoće. Prva je pokazati da L može izraziti činjenicu da je neka formula dokaziva. Doista, na prvi pogled, formule od L mogu biti koncipirane samo da izraze svojstva prirodnih brojeva, a ne svojstva formula od L.
C'est là qu'interviennent les numéros de Gödel (section 2.4). Toute formule θ de L étant une chaîne de caractères, on peut la représenter par l'entier naturel [θ[. Quant à la démontrabilité, elle est déjà encapsulée dans le programme Dem	Ovdje dolaze Gödelovi brojevi (Poglavlje 2.4). Bilo koja formula θ od L budući da je niz znakova, može se predstaviti prirodnim cijelim brojem [θ[. Što se tiče dokazivosti, ona je već sadržana u programu Dem definiranom

défini par l'équation (3.2). En combinant ces deux éléments, on peut définir une fonction DemN : N → BOOL	jednadžbom (3.2). Kombinacijom ova dva elementa možemo definirati funkciju DemN: N → BOOL
C'est le premier cas de cette définition qui importe vraiment : DemN([θ[) = Dem(θ) pour tout énoncé θ. On a donc essentiellement changé le domaine de Dem afin d'exploiter le fait que L représente l'arithmétique. Il faut d'abord montrer que DemN est calculable : cela découle du fait que Dem est calculable (puisque L est complète, c'est un programme total), de même que la fonction qui retrace une chaîne de caractères à partir de son numéro de Gödel et celle qui détermine si une chaîne donnée est un énoncé.	To je prvi slučaj ove definicije koji je jako važan: DemN([θ[) = Dem(θ) za bilo koju izjavu θ. Stoga smo bitno promijenili domenu Dem kako bismo iskoristili činjenicu da L predstavlja aritmetiku. Prvo moramo pokazati da je DemN izračunljiv: to slijedi iz činjenice da je Dem izračunljiv (budući da je L potpun, to je potpuni program), kao i funkcija koja prati niz znakova iz njoj zadanog Gödelovog broja i jednog koji određuje je li dani niz propozicija.
On peut ainsi voir DemN comme un programme total et on obtient alors que pour tout énoncé θ, la formule $\neg\langle\langle$DemN $\rangle$([θ[) signifie : « L'énoncé θ n'est pas démontrable. » On semble se rapprocher du but ! Il reste toutefois une seconde difficulté à surmonter : l'auto-référence. En effet, la formule $\neg\langle\langle$DemN $\rangle$ peut seulement parler d'un énoncé qu'on lui fournit en entrée, mais cet énoncé peut-il être celui-là même qu'on tente de construire à l'aide de $\neg\langle\langle$DemN $\rangle$?	Stoga možemo gledati na DemN kao potpuni program i tada dobivamo da za bilo koju izjavu θ, formula $\neg\langle\langle$DemN $\rangle$([θ[) znači: "propozicija θ nije dokaziva". Čini se da smo sve bliže cilju! Međutim, ostaje još jedna poteškoća koju treba prevladati: autoreferencija. Zapravo, formula $\neg\langle\langle$DemN $\rangle$ može govoriti samo o iskazu koji mu je dan kao vrijednost, no može li taj iskaz biti upravo onaj koji pokušavamo konstruirati pomoću $\neg\langle\langle$DemN $\rangle$?

Formellement, l'énoncé γ recherché est donc un point fixe : L'existence d'un tel point fixe ne dépend pas, en fait, de la formule considérée. Prenons donc une pause dans notre cheminement afin d'établir le Lemme 3 ci-dessous	Formalno, naša propozicija γ je fiksna točka: Postojanje takve fiksne točke zapravo ne ovisi o razmatranoj formuli. Napravimo pauzu u našem traganju kako bismo utvrdili lemu 3 u nastavku.
4.1 Lemme du point fixe	4.1 Lema o fiksnoj točki
L'argument clé pour obtenir notre point fixe est celui, bien connu, de la diagonale de Cantor, dont l'une des utilisations les plus célèbres sert à démontrer qu'il n'y a pas de bijection entre l'ensemble des entiers naturels et celui des nombres réels [7]. Rappelons de quoi il s'agit.	Ključni argument za dobivanje naše fiksne točke dobro je poznata Cantorova dijagonala, čija je jedna od najpoznatijih upotreba da pokaže nepostojanje bijekcija između skupa prirodnih cijelih brojeva i skupa realnih brojeva. Prisjetimo se što je to.
Dans le cas de la bijection entre N et R, chaque ligne Ai représente un nombre réel entre 0 et 1 dont l'entrée αij est la j-ème décimale. Dans le cas du Lemme 3, les αij seront plutôt des énoncés bien choisis de notre système L. On définit ensuite une nouvelle ligne le long de la diagonale de la matrice en posant.	U slučaju bijekcije između N i R, svaki redak Ai predstavlja realni broj između 0 i 1 čija je ulazna vrijednost αij j-ta decimala. U slučaju leme 3, αij će biti pomno odabrane propozicije našeg sustava L. Zatim definiramo novi pravac duž dijagonale matrice.

Dans le cas des nombres réels, on obtient une contradiction en appliquant le raisonnement suivant, qui est peut-être la contraposée de celui que vous connaissez. B doit forcément être la représentation décimale d'un certain nombre réel entre 0 et 1, donc B = Ai pour un certain i. Or, en comparant la i-ème entrée de B avec celle de Ai, on trouve f (αii) = αii. Donc f admet un point fixe. Pour que cela soit contradictoire, il suffit d'avoir défini la fonction f pour qu'elle change chaque décimale en une décimale différente, ce qui est facile à faire.	U slučaju realnih brojeva, dobivamo kontradikciju primjenom sljedećeg razmišljanja, koje je možda suprotstavljeno onome što znate. B nužno mora biti decimalni prikaz određenog realnog broja između 0 i 1, tako da je B = Ai za određeni i. A, uspoređujući i-ti unos od B s onim od Ai, nalazimo f (αii) = αii. Dakle, f dopušta fiksnu točku. Kako bi ovo bilo kontradiktorno, sve što moramo učiniti je definirati funkciju f da promijenimo svako decimalno mjesto u drugo decimalno mjesto, što se može lako učiniti.
Ce qu'il faut retenir de l'argument de Cantor n'est donc pas tellement qu'il permet d'obtenir une contradiction (ce n'est qu'un usage possible parmi d'autres), mais plutôt qu'il permet de trouver un point fixe d'une fonction f donnée. C'est la technique qu'on utilisera plus bas, à ceci près qu'on doit remplacer la relation d'égalité par une relation d'équivalence.	Ono što moramo izvući iz Cantorova argumenta nije da omogućuje dobivanje kontradikcije (to je samo jedna od mogućih upotreba), nego da omogućuje pronaći fiksnu točku zadane funkcije f. Ovo je tehnika koju ćemo koristiti u nastavku, osim što odnos jednakosti zamjenjujemo odnosom ekvivalencije.
4.1 Contradiction !	4.1 Kontradikcija!
Revenons à notre preuve du théorème de Gödel. Le lemme du point fixe nous permet de définir des énoncés qui parlent à propos d'eux-mêmes, via leur numéro de Gödel. En appliquant ce résultat, on obtient un énoncé.	Vratimo se našem dokazu Gödelovog teorema. Primjenom Gödelovog broja, lema o fiksnoj točki omogućuje nam definiranje propozicija koje govore same o sebi, i tako dolazimo do propozicije
Remarquons que l'énoncé ¬⟨⟨DemN ⟩([γ[)	Primijetimo da propozicija ¬⟨⟨DemN ⟩([γ[)

signifie littéralement que γ n'est pas démontrable ! Il s'agit donc de ce fameux énoncé de Gödel annoncé en introduction. Il ne nous reste plus donc qu'à déterrer une contradiction. Or, puisque L est une logique cohérente, elle ne peut démontrer à la fois γ et ¬γ. Puisqu'elle est complète, elle ne peut pas non plus ne démontrer ni γ, ni ¬γ. Contradiction ! Cela complète donc la preuve du théorème de Gödel.	doslovno znači da γ nije dokazivo! Ovdje se radi o već spomenutoj Gödelovoj propoziciji u uvodu. Ostaje nam samo da otkrijemo gdje je proturječje. Budući da L funkcionira na temelju konzistentne logike, ne može pokazati i γ i ¬γ. Isto tako, budući da je potpun, ne može dokazati ni γ ni ¬γ. Evo kontradikcije! Time je završen dokaz Gödelovog teorema.
2 Conclusion	2 Zaključak
On vient de présenter une preuve en quelques pages du théorème d'incomplétude de Gödel, reposant uniquement sur certaines intuitions à propos des notions de preuve et de programme. Certains pourraient être tentés d'accuser cette approche de manquer de rigueur, puisqu'on ne donne aucune définition précise de ces deux notions. Je leur répondrai qu'il s'agit d'un juste compromis entre rigueur et accessibilité.	Upravo smo na nekoliko stranica predstavili dokaz Gödelovog teorema o nepotpunosti, koji se temelji samo na intuiciji o pojmu dokaza i programa. Pošto nismo precizno definirali ta dva pojma, pristup bi se mogao kritizirati zbog nedostatka rigoroznosti. Moj odgovor bi bio da se radi o pravednom kompromisu između rigoroznosti i pristupačnosti.
On peut illustrer ce point de vue par une analogie avec l'enseignement du calcul différentiel au collégial. Il serait mal avisé, je crois, de débuter le semestre par une définition des limites qui reposerait sur le formalisme ε-δ	Ovo perspektivu možemo približiti analogijom podučavanja diferencijalnog računa na fakultetu. Vjerujem da bi bilo pogrešno započinjati semestar definiranjem granica formalne ε-δ analize. Ukoliko niste spremni uložiti

de l'analyse. À moins d'être prêt à investir beaucoup de travail pour familiariser les étudiants à penser en termes de ε-δ (un objectif plus ambitieux que celui de leur apprendre à dériver), cette approche aurait comme principal effet d'obscurcir complètement une intuition autrement bien précise, qu'on peut gagner simplement en manipulant une calculatrice.	mukotrpan trud podučiti studente da razmišljaju na način ε-δ (što je ambicioznijі cilj od podučavanja derivacije te analize), jedini učinak ovog pristupa bio bi zamagljivanje već vrlo precizne intuicije, koja se može vrlo jednostavno steći rukovanjem kalkulatora.
On préconise donc plutôt cette intuition comme point de départ pour isoler certaines propriétés « évidentes » des limites (comme $1/\infty = 0$ ou $\lim(A+B) = (\lim A)+(\lim B)$) à partir desquelles on peut construire rigoureusement toute la théorie. Les plus intéressés iront peut-être ensuite voir sous le capot là où se cachent les ε-δ, mais pour la plupart des étudiants, cette approche ne mine en rien leur compréhension de la matière et des idées importantes qui la justifient.	Stoga se radije preporučuje ovakva intuicija kao početna točka za izdvajanje određenih "očitih" svojstava granica (kao što je $1/\infty = 0$ ili $\lim(A+B) = (\lim A)+(\lim B)$) iz kojih možemo rigorozno izgraditi cijelu teoriju. Oni najustrajniji tada mogu zaviriti „ispod haube“ da vide gdje se skrivaju ε-δ. No, za većinu studenata ovaj pristup ne potkopava razumijevanje gradiva i njegovih bitnih dokaza.
De la même manière, les lecteurs les plus intéressés par la logique sont bienvenus de consulter un ouvrage classique en cette matière, tel que Shoenfield (1967). Ils y trouveront tous les éléments manquants : une notion précise de la calculabilité ainsi qu'un exemple de système cohérent qui représente l'arithmétique et les détails de la traduction des preuves et des formules de ce système en leur numéro de Gödel. Pour les autres, je ne pense pas que	Na isti način, čitatelji koje najviše zanima logika mogu prelistati klasična djela o ovoj temi, kao što je Shoenfield (1967).Tamo će pronaći elemente koji ovdje nedostaju: precizan pojam izračunljivosti kao i primjer konzistentnog sustava koji predstavlja aritmetiku i detalje prevođenja dokaza i formula ovog sustava u njihov Gödelov broj. Što se ostalih tiče, ne mislim da intuitivni pristup skriva važne ideje Gödelovog teorema: naprotiv, on ih čak iznosi

l'approche intuitive cache les idées importantes du théorème de Gödel : au contraire, elle les met même en lumière. J'ajouterai, pour les experts, quelques remarques concernant la stratégie de preuve employée, soit une preuve par l'absurde : on a supposé que L était complet afin de construire γ. Cela rompt avec l'approche directe employée par Gödel, qui parvient à construire γ sans cette hypothèse. L'avantage pratique le plus important de notre approche est de rendre le programme Dem total, simplifiant ainsi certains détails, soit : la définition de la relation d'équivalence « $\sim$ » entre les formules, la démonstration du lemme du point fixe et l'argument final. Il faut aussi savoir que le résultat original de Gödel demande, pour l'argument final, une hypothèse supplémentaire, l'ω-cohérence du système, dont on n'a pas eu besoin ici. Il est bien sûr possible de contourner cette hypothèse supplémentaire par une preuve directe alternative due à Rosser (voir Girard (2006) [1] à ce sujet), mais cela se fait au prix de certaines prouesses techniques dont l'usage aurait été contraire à l'objectif premier de cet article, qui était d'évacuer le plus grand nombre possible de considérations techniques pour ne garder que le coeur de la preuve.	na vidjelo. Dodat ću, za stručnjake, nekoliko napomena koje se tiču korištene strategije dokazivanja, tj. dokazivanja metodom svođenja na apsurd: pretpostavili smo da je L potpun kako bismo konstruirali γ. Ovo je u suprotnosti s Gödelovim izravnim pristupom, koji je uspio konstruirati γ bez ove pretpostavke. Najvažnija praktična prednost našeg pristupa je učiniti Dem program potpunim, čime se pojednostavljuju određeni detalji, naime: definicija relacije ekvivalencije "$\sim$" između formula, dokaz leme o fiksnoj točki i konačni argument. Također bismo trebali spomenuti da Gödelovo originalno rješenje zahtijeva, kao konačni argument, jednu dodatnu hipotezu: ω-konzistentnost sustava, koja nam ovdje nije bila potrebna. Naravno, moguće je zaobići ovu hipotezu alternativnim izravnim dokazom koji je donio Rosser (vidi Girard (2006) o ovoj temi), ali to je učinjeno uz pomoć određenih formalnosti, čija bi uporaba bila u suprotnosti s primarnim ciljem ovog članka: ukloniti što više tehničkih razmatranja kako bi se zadržala samo srž dokaza.

On y a, bien sûr, aussi perdu quelque chose. Puisqu'il s'agit d'une preuve par contradiction, celle-ci ne pourrait pas être formulée, disons, en logique intuitionniste, où de telles preuves sont proscrites. Cette étape de reformulation de la « vraie » preuve en une preuve formelle semble toutefois être nécessaire pour démontrer, à propos d'un système formel L donné, le second théorème d'incomplétude de Gödel. Ce dernier donne simplement un exemple plus percutant d'un énoncé indécidable du système L en question, à savoir : l'énoncé qui affirme que L est cohérent ! Pour les systèmes qui permettent les preuves par contradiction, il semble tout de même que l'approche employée ici n'enlève rien à ce résultat ni à sa preuve.	Nešto smo, naravno, time i izgubili. Budući da se radi o dokazu kontradikcijom, on se ne bi mogao formulirati, recimo, u intuicionističkoj logici, gdje su takvi dokazi zabranjeni. Čini se, međutim, da je ovaj korak preoblikovanja "pravog" dokaza u formalni dokaz neophodan za dokazivanje drugog Gödelovog teorema o nepotpunosti putem formalnog sustava L. Potonji jednostavno daje bolji primjer neodlučive izjave sustava L, odnosno izjave koja tvrdi da je L konzistentan! Za sustave koji dopuštaju dokaze kontradikcijom, čini se da pristup koji se ovdje koristi ne umanjuje ovaj rezultat ili njegov dokaz.

4.2 Glossaire

A

abstraction, n.f. - apstrakcija

absurde, n.m - apsurd

addition, n.f. - zbrajanje

addition de matrices, n.f. – zbrajanje matrica

affirmation, n.f. - afirmacija

algèbre, n.f. – algebra

algèbre de Boole, n.f. – Booleova algebra

algébrique, a – algebarski

algorithme, n.m. - algoritam

algorithme déterministe, n.m. – deterministički algoritam

algorithme probabiliste, n.m. - probabilistički algoritam

alternative, n.f. - varijanta

amalgame, n.m. - amalgam

analogie, n.f. - analogija

analyse, n.f. - analiza

analyse fonctionnelle, n.f. – funkcionalna analiza

analytique, a - analitički

arbitraire, a - proizvoljno

arithmétique, n.f. - aritmetika

auto-référence, n.f. - autoreferencija

axiomatisation, n.f. - aksiomatizacija

axiome, n.m. – aksiom

B

base, n.f. - baza

base de données, n.f. – baza podataka

bijection, n.f. - bijekcija

binaire, a - binarni

bloc de mémoire, n.m. – memorijski blok

booléen, a - Booleovi

boucle infinie, n.f. – beskonačna petlja

C

calcul, n.m. - račun

calcul différentiel, n.m. – diferencijalni račun

calcul intégral, n.m. – integralni račun

calcul numérique, n.m. – numerički izračun

calculable, a - izračunljivo

calculatrice, n.f. - kalkulator

cardinal, a - glavni

chaîne erronée, n.f. – pogrešan niz

chaînes de caractères, n.f. – znakovni niz

code binaire, n.m. - binarni kod

code source, n.m. – izvorni kod

coefficient, n.m. - koeficijent

cohérence, n.f. - dosljednost

cohérent, a - dosljedan

commutatif, a - komutativan

complet, a - potpun

complexe,a – kompleksan

compter, v - brojati

conception- n.f. - koncepcija

concision, n.f. – konciznost

conclusion, n.f. - zaključak

conjonction, n.f. - veznik

connecteur logique, n.m. – logički konektor

contradiction, n.f. - kontradikcija

contradictoire, a - kontradiktoran

contraire, a - suprotno

correcte, a – točno

D

décimale, n.m. - decimala
décoder, v - dekodirati
déduction, n.f. - dedukcija
définition, n.f. - definicija
démonstration, n.f. - dokaz
démontrer, v - prikazati
dénombrable, a - prebrojiv
dénominateur, n.m. - nazivnik
dériver, v - izvesti
déterministe, a - deterministički
diagonale, n.f. - dijagonala
discipline, n.f. - disciplina
disjonction, n.f. - disjunkcija
données infinies, n.f. – beskonačni podaci

E

élément, n.m. - element
élémentaire, a - elementarni
encoder, v - kodirati
énoncé, n.m. - propozicija
    énoncé arithmétique élémentaire, n.f. – osnovna aritmetička propozicija
ensemble, n.m. - skup
    ensemble fermé, n.m. – zatvoreni skup
    ensemble infini énumérable, n.m. – beskonačno rekurzivno prebrojiv skup
    ensemble vide, n.m. – prazan skup
    ensembles énumérables, n.m. – rekurzivno prebrojivi skupovi
énumérable, a - prebrojiv
    énumération, n.f. - numeracija
équation, n.f. - jednadžba
équivalence, n.f. - jednakovrijednost
exécution, n.f. - izvršenje

exécution d’un programme, n.f. – izvođenje programa

externe, a – vanjski

F

faux, a - FALSE

fonction, n.f - funkcija

fonction calculable, n.f. – izračunljiva funkcija

fonctions récursives, n.f. – rekurzivne funkcije

fondamental, a - temeljno

formalisme, n.m. – formalizam

G

généralité, n.f. - općenitost

géométrie, n.f. - geometrija

grammaire, n.m. – gramatika

H

hypothèse, n.f. - pretpostavka

hypothèse en sciences, n.f. – znanstvena pretpostavka

I

implication, n.f. - implikacija

improbable, a – malo vjerojatno

incertitude, n.f. - nesigurnost

inclusion, n.f. - inkluzija

incohérent, a - nedosljedan

incomplet, a - nepotpun

incomplétude, n.f. - nepotpunost
indécidabilité, n.f. - neodlučivost
    indécidable, a - neodlučivo
information, n.f. - informacija
informatique, n.f. – informatika
instruction, n.f. - naredba
intelligence artificielle, n.f. – umjetna inteligencija
interférence, n.f.- smetnja
interne, a - interno
intuitionnisme, n.m. - intuicionizam
intuitive, a - intuitivno
invariant, n.m. - invarijanta
irréductibilité, n.m. - neskrativost

L

langage, n.m. - jezik
    langage de programmation, n.m. – programski jezik
    langage logique, n.m. – logički jezik
    langage symbolique, n.m. – simbolički jezik
lemme, n.m. - lema
limitation, n.f. - ograničenje
limite, n.f. - limes
linéarité, n.f. - linearnost
logicisme, n.m. - logicizam
logique, n.f. - logika
    logique intuitionniste, n.f. – intuicionistička logika
    logique mathématique, n.f. – matematička logika

M

machine, n.f. - stroj
    machine de Turing, n.f. – Turingov stroj
mathématiques, n.f. - matematika
matrice, n.f. - matrica

matrice infinie, n.f. – beskonačna matrica
mémoire, n.f. - memorija
modèles mathématiques, n.m. – matematički model

N

nécessaire, a - nužno
négatif, a - negativno
négation, n.f. - negacija
négation logique, n.f. – logička negacija
nombre, n.m. - broj
nombre naturel, n.m. – prirodan broj
nombre réel, n.m. – realan broj
non-terminaison, n.f. – bez prekida
notion d'ensemble, n.f. – pojam skupa
notion de calcul, n,f. – pojam izračuna
numérateur, n.m. - brojnik
numérique, a – numerički
numéros de Gödel, n.m. – Gödelovi brojevi

O

objet, n.m. - predmet
opération, n.f. - operacija
opérations arithmétiques de base, n.f. – osnovne aritmetičke operacije
ordinateur, n.m. – računalo

P

point, n.m. - točka
point fixe, n.m. – fiksna točka
prédicat, n.m. - predikat
preuve, n.f. - dokaz
preuve par contradiction, n.f. – dokaz kontradikcijom

preuve par l’absurde, n.f. – dokaz primjenom metode apsurda
probabilité, n.f. - vjerojatnost
programmation, n.f. - programiranje
programme, n.m. - program
programmeur, n.m. - programer
propriété, n.f. – svojstvo

Q

quantificateur- n.m. - kvantifikator
quantificateur existentiel, n.m. – egzistencijalni kvantifikator
quantificateur universel, n.m. – univerzalni kvantifikator
quantité, n.f. – količina

R

rapport, n.m. - omjer
réciproque, a - recipročno
récurrence, n.f. - ponavljanje
récursive, a - rekurzivno
reformulation, n.f. - reformulacija
réfutation, n.f. - pobijanje
résultat, n.m. - rezultat
rigoureuse, a – rigorozno

S

science, n.f. - znanost
statistique, n.f. - statistika
suffisamment puissant, a – dovoljno jak
symbole, n.m. - simbol
syntaxe, n.f. - sintaksa
système, n.m. - sustav
système abstrait, n.m. – apstraktni sustav

T

tautologie, n.f. - tautologija

technicité, n.f. - formalnost

technique, n.f. - tehnika

terminologie, n.f. - terminologija

théorème, n.m. - teorem

théorème d'incomplétude, n.m. – teorem nepotpunosti

théorie des ensembles, n.f. – teorija skupova

total, a - potpun

traduction, n.f. – prijevod

type booléen, n.m. – Booleovi tipovi

V

valeur, n.f. - vrijednost

valide, a - važeći

variable, n.f. - varijabla

variation d'une fonction, n.f. – varijacija funkcije

vérificateur, n.m. - verifikator

vérifier, v - provjeriti

vérité, n.f. - istina

vrai, a - TRUE

4.3 Fiches terminologiques

FICHE TERMINOLOGIQUE 1	
Terme	énoncé
Catégorie grammaticale	n. m.
Domaine	logique
Sous-domaine	mathématiques
Définition	Ensemble des données exposant ce que l'on doit résoudre, démontrer. https://www.cnrtl.fr/definition/%C3%A9nonc%C3%A9
Hyperonyme(s)	/
Hyponyme(s)	/
Contexte du terme et référence	« Le calcul des prédicats est un référent pour donner une description (ou des descriptions concurrentes) de ce qui est dit lorsqu'un mathématicien énonce une proposition ou une définition mathématique.» https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285113/document
Equivalent croate	propozicija
Remarque linguistique	/
Catégorie grammaticale	n. f.
Contexte de l'équivalent	« U propozicijskoj logici ne zanima nas niti sadržaj, niti struktura propozicija nego samo je li propozicija istinita ili lažna, tj. zanima nas samo vrijednost istinitosti propozicije.»
Source de l'équivalent	http://www.zemris.fer.hr/predmeti/is/nastava/web-propozicijska-logika.pdf

FICHE TERMINOLOGIQUE 2	
Terme	indécidabilité
Catégorie grammaticale	n. m.
Domaine	logique
Sous-domaine	Logique mathématique, mathématique
Définition	Propriété d'une théorie dans laquelle il n'existe pas de procédé effectif permettant de décider, pour toute formule, si elle est ou non démontrable.

	https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/ind%C3%A9cidabilit%C3%A9/42477
Hyperonyme(s)	
Hyponyme(s)	/
Contexte du terme et référence	« L'indécidabilité est la négation de la décidabilité.» https://www.i3s.unice.fr/~nlt/cours/licence/it/s6_itdut_poly.pdf
Equivalent croate	neodlučivost
Remarque linguistique	/
Synonyme(s)	/
Catégorie grammaticale	n. f.
Contexte de l'équivalent	« U sljedećem dijelu poglavlja iznosimo neke rezultate o neodlučivosti teorije Q i proširenja. Reći ćemo da je teorija T odlučiva ako je skup teorema od T rekurzivan. »
Source de l'équivalent	https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A5413/datastream/PDF/view

FICHE TERMINOLOGIQUE 3	
Terme	démonstration
Catégorie grammaticale	n. f.
Domaine	logique
Sous-domaine	mathématiques
Définition	Raisonnement qui établit la vérité d'une proposition déductivement, c'est-à-dire en la rattachant par un lien nécessaire à d'autres propositions admises comme vraies ou antérieurement démontrées https://www.cnrtl.fr/definition/d%C3%A9monstration
Remarque linguistique	/
Synonyme	preuve, argument, proposition
Hyperonyme(s)	/
Hyponyme(s)	/
Contexte du terme et référence	« Quand on rédige une démonstration, la proposition que l'on cherche `a démontrer s'appelle la conclusion. » https://perso.univ-rennes1.fr/marie-pierre.lebaud/ma2/pdf/demonstration.pdf
Equivalent croate	dokaz
Catégorie grammaticale	n.m.

Contexte de l'équivalent	« Prije nego vidimo kako dokazi funkcioniraju, upoznajmo se s "pravilima igre", tj. s pravilima zaključivanja — matematičkom logikom. »
Source de l'équivalent	https://hrcak.srce.hr/file/199447

FICHE TERMINOLOGIQUE 4	
Terme	preuve par contradiction
Catégorie grammaticale	n. f.
Statut (usage)	langue spécialisée
Domaine	logique
Sous-domaine	logique mathématique
Définition	Calcul permettant de vérifier l'exactitude du résultat d'une opération en faisant l'opération inverse. https://www.cnrtl.fr/definition/preuve
Synonyme(s)	Preuve par l'absurde
Contexte du terme et référence	« Preuves par contradiction (ou preuves par l'absurde). On les appelle aussi preuve indirectes. Elles sont basées sur le fait que $p \Rightarrow q \equiv (p \land \neg q) \Rightarrow (r \land \neg r)$. Rappelons que $r \land \neg r$ est une contradiction.» http://www.iro.umontreal.ca/~boyer/Archives/Automne07/Aut07/cours/semaine2.pdf
Equivalent croate	dokaz kontradikcijom
Remarque linguistique	/
Synonyme(s)	dokaz primjenom metode apsurda
Catégorie grammaticale	n. m.
Contexte de l'équivalent	«3.4.2 Dokaz kontradikcijom Ovo je druga strategija dokazivanja teorema $P \Rightarrow Q$. Za razliku od direktnog dokaza, put od pretpostavke do tražene tvrdnje je "zaobilazan". »
Source de l'équivalent	https://hrcak.srce.hr/file/199447

FICHE TERMINOLOGIQUE 5	
Terme	Nombre entier naturel
Catégorie grammaticale	n. m.

Statut (usage)	langue spécialisée
Domaine	mathématiques
Sous-domaine	Théorie des nombres
Définition	Un nombre entier naturel est un nombre entier qui est positif. https://www.maths-et-tiques.fr/telech/1_Ensembles_nombres.pdf
Synonyme(s)	Nombre entier relatif
Hyperonyme(s)	/
Hyponyme(s)	/
Contexte du terme et référence	« On pourra faire remarquer qu'un entier naturel divisible par 4 n'est pas forcément divisible par 100.» http://www.editions-hachette-livre-international.com/wp-content/uploads/2013/pdf_guides/Maths-Cargo/GuideCargo6e-Partie2.pdf
Equivalent croate	Prirodni broj
Catégorie grammaticale	n. m.
Contexte de l'équivalent	« Brojevi 1, 12, 365, 32, 123 koji su se poja-vili u tim rečenicama nazivaju se prirodni brojevi. »
Source de l'équivalent	https://element.hr/wp-content/uploads/2020/06/unutra-12326.pdf

FICHE TERMINOLOGIQUE 6	
Terme	Ensemble dénombrable
Catégorie grammaticale	n. m.
Domaine	logique
Sous-domaine	Mathématiques, logique mathématique
Définition	Plus formellement un ensemble E est dit dénombrable quand il est équipotent à l'ensemble des entiers naturels N, c'est-à-dire qu'il existe une bijection de N sur E. https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Ensemble-denombrable.html
Remarque linguistique	/
Synonyme(s)	/
Hyperonyme(s)	ensemble

Contexte du terme et référence	«On remarque que si E est un ensemble dénombrable, alors il existe une injection de E dans N (car une bijection vers une partie de N définit en particulier une injection vers N). La réciproque est vraie et sera très utile en pratique. » https://www.math.univ-toulouse.fr/~jroyer/TD/2018-19-L2PS/ChA-Denombrabilite.pdf
Equivalent croate	Prebrojivi skup
Catégorie grammaticale	n. m.
Contexte de l'équivalent	« Najprije se kratko bavimo istobrojnim, odnosno ekvipotentnim skupovima, a zatim prelazimo na beskonačne skupove. Uz pomoć beskonačnih skupova gradimo prebrojive i neprebrojive skupove te se njima bavimo do kraja rada. »
Source de l'équivalent	http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/VUK40.pdf

FICHE TERMINOLOGIQUE 7	
Terme	cohérence
Catégorie grammaticale	n. f.
Domaine	logique
Sous-domaine	Logique mathématique
Définition	Propriété de ce qui est cohérent, logique interne d'un discours, d'une idée, d'un acte, etc. ; qualité d'une personne, d'un groupe cohérents https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/coh%C3%A9rence/17013
Synonyme (s)	/
Hyponyme(s)	/
Contexte du terme et référence	«Le problème des démonstrations de cohérence a ceci de particulier qu'il s'agit d'un problème de nature philosophique qui peut s'énoncer en termes mathématiques précis.» http://www.numdam.org/item/SPHM_1980___1_A1_0.pdf
Equivalent croate	konzistentnost
Catégorie grammaticale	n. f.
Contexte de l'équivalent	« Svaki podskup konzistentnog skupa je konzistentan. Svaki nad- skup inkonzistentnog skupa je inkonzistentan.»
Source de l'équivalent	https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/MLI-predavanja-2017.pdf

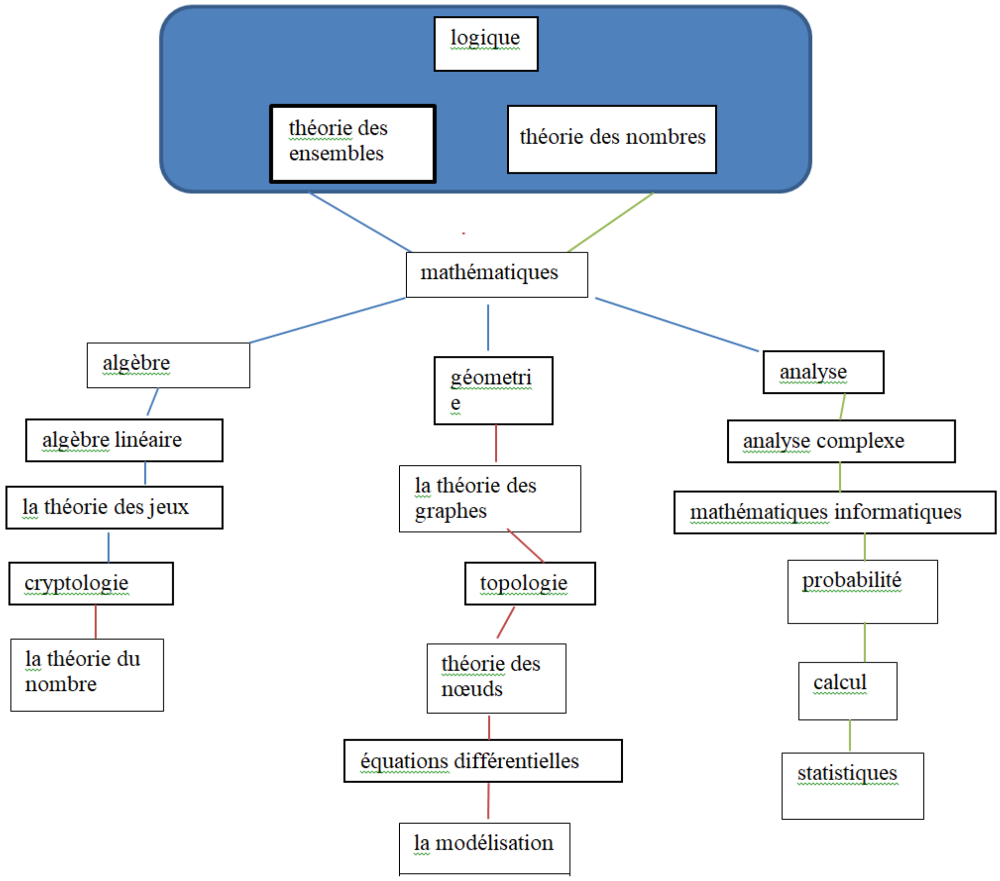
FICHE TERMINOLOGIQUE 8	
Terme	énumérer
Catégorie grammaticale	v.
Domaine	mathématiques
Sous-domaine	/
Définition	énoncer successivement les parties d'un ensemble, les donner en détail https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/%C3%A9num%C3%A9rer/30111
Synonyme(s)	/
Hyponyme(s)	/
Contexte du terme et référence	«Si A = {a, b} et n = 4, le nombre de mots de longueur 4 qui peuvent être composés à partir des lettres a et b est 24 = 16, on peut les énumérer :…» https://www.math.univtoulouse.fr/~msablik/Cours/MathDiscretes/MathDiscretes.pdf
Equivalent croate	numerirati
Catégorie grammaticale	v
Contexte de l'équivalent	« Varijable se dijele i po jednom drugom principu na diskretne i kontinuirane varijable: ako varijabla, bar načelno, može poprimiti bilo koju realnu vrijednost unutar nekog raspona, zovemo ju kontinuiranom, a ako pak može poprimiti samo konačno mnogo vrijednosti ili pak samo vrijednosti koje možemo numerirati cijelim brojevima. »
Source de l'équivalent	https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/main1.pdf

FICHE TERMINOLOGIQUE 9	
Terme	premier
Catégorie grammaticale	n.m.
Domaine	mathématiques
Sous-domaine	/
Définition	Se dit d'un entier naturel n'ayant pour diviseurs que 1 et lui-même ou d'un entier relatif n'ayant pour diviseurs que 1, − 1, lui-même et son opposé. https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/premier/63552
Hyperonyme(s)	/
Hyponyme(s)	/

Contexte du terme et référence	« 4 n'est pas un nombre premier car il a trois diviseurs : 1, 4 et 2.» http://labomath.free.fr/qcms/seconde/premiers/premiers.pdf
Equivalent croate	prosti broj
Catégorie grammaticale	n.m.
Contexte de l'équivalent	«Za bilo koji prosti broj p, postoji složeni broj 2p. Budući da ima beskonačno mnogo prostih brojeva, onda ima i ovakvih složenih.»
Source de l'équivalent	https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/Seminar_Prosti_brojevi.pdf

FICHE TERMINOLOGIQUE 10	
Terme	calcul
Catégorie grammaticale	n. m.
Domaine	logique
Sous-domaine	Logique mathématique, mathématiques
Définition	Ensemble d'opérations coordonnées entre elles, obéissant à des lois et à des règles de formation, et portant sur des prédicats ou sur des propositions. https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/calcul/12276
Synonyme(s)	/
Hyponyme(s)	/
Contexte du terme et référence	«A partir d'un grand nombre de calculs numériques, on a conjecturé que pour tout réel $x \geq 2$, on avait $\pi(x) < Li(x)$.» https://math.unice.fr/~frapetti/analyse/Logique.pdf
Equivalent croate	izračun
Synonyme(s)	izračun
Catégorie grammaticale	n. m.
Contexte de l'équivalent	« U većini izračuna u gospodarstvu upotrebljava se pravilo trojno: iz triju poznatih veličina izračuna se četvrta nepoznata.»
Source de l'équivalent	https://repozitorij.vuka.hr/islandora/object/vuka%3A36/datastream/PDF/view

4.4. Arbre de domaine



Dans l'arbre de domaine proposé ici, on prend la logique comme la discipline de laquelle se branchent les mathématiques. Les mathématiques sont un domaine d'étude complexe et comprennent des sujets interdépendants et des concepts qui se chevauchent. De plus, une analyse approfondie des branches des mathématiques nous aide à organiser clairement les concepts.

Théorie des nombres

Comme son nom l'indique, la théorie des nombres est l'une des branches les plus anciennes des mathématiques qui a établi une relation entre les nombres appartenant à l'ensemble des nombres réels. La théorie des nombres comprend des opérations sur les nombres entiers comme l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. On y construit des systèmes complexes comme la cryptographie, la théorie des jeux et les autres sous-domaines montrés dans l'arbre de domaine. La branche la plus importante qui est directement influencée par la théorie des nombres est algèbre. Un vaste domaine des mathématiques, l'algèbre traite de la résolution d'expressions algébriques génériques et de leur manipulation pour obtenir des résultats. Effectivement, les numéros de Gödel sont créés par l'utilisation innovante de l'algèbre (Bouffard, 2018).

Théorie des ensembles

Branche des mathématiques qui traite des propriétés de collections bien définies d'objets, qui peuvent ou non être de nature mathématique, tels que des nombres ou des fonctions. La théorie est moins valable dans son application directe que comme base d'une terminologie précise et adaptable pour la définition de concepts mathématiques complexes et sophistiqués. Nous avons déjà mentionné Russell et Whitehead, qui, dans l'œuvre *Principia Mathematica,* voulaient préciser toute la mathématique en matière de théorie des ensembles (Krivine, 1998).

Géométrie

Traitant de la forme, des tailles et des volumes des figures, la géométrie est une branche pratique des mathématiques qui se focalise sur l'étude des polygones, des formes et des objets géométriques en deux dimensions et en trois dimensions. La congruence des objets est étudiée en même temps en se concentrant sur leurs propriétés particulières et le calcul de leur surface, volume et périmètre. L'importance de la géométrie réside dans son utilisation réelle lors de la création d'objets dans la vie pratique (Russo, s.d.).

Analyse

C'est l'une des branches les plus avancées des mathématiques qui étudie le changement dans l'espace. Auparavant, les mathématiques ne pouvaient fonctionner que sur des objets statiques, mais avec le calcul, les principes mathématiques ont commencé à être appliqués aux objets en mouvement. Utilisée dans une multitude de domaines, la branche peut être classée dans le calcul différentiel et intégral, tous deux très différents l'un de l'autre. L'analyse est la branche des mathématiques traitant des fonctions continues, des limites et des théories connexes, telles que la différenciation, l'intégration, la mesure, les séquences infinies, les séries et les fonctions analytiques. Ces théories sont généralement étudiées dans le contexte des nombres et des fonctions réels et complexes (Dieudonné, s.d.).

4.5 Commentaire de la traduction

Le texte que nous avons traduit est une interprétation innovatrice du théorème révolutionnaire de Gödel. Dans le texte, l'auteur fait rejoindre l'informatique (la science la plus importante d'aujourd'hui) avec les mathématiques et la logique. Ce que l'auteur suggère dans le texte est que nous avons un avantage important sur Gödel et ses contemporains, et ce sont en fait les ordinateurs plus puissants. En introduisant l'informatique dans le domaine de la logique, nous avons mélangé une terminologie moderne, avec une terminologie stable de la logique. Pourtant, en traduisant le texte, nous n'avons pas rencontré de graves problèmes concernant la terminologie d'informatique. Il est peut-être utile de mentionner que la nature du domaine en question nous invite à l'anglais comme langue de référence qui nous a permis de trouver l'équivalent croate. Lors de la traduction du texte, nous nous sommes appuyés sur la littérature professionnelle en anglais afin de trouver les équivalents en croate. Par exemple le terme *boucle infinie,* en croate *beskonačna petlja*, est une traduction littérale de l'anglais *infinite loop*. Une autre remarque concernant l'influence de l'anglais sur la terminologie d'informatique est qu'en croate, au lieu d'utiliser *TOČNO/NETOČNO* en traduisant *VRAI/FAUX,* on préfère l'anglais *TRUE/FALSE.* En conclusion, la terminologie informatique est pleine d'anglicismes.

Cela ne vaut pas seulement pour l'informatique ou l'anglais. Les traductions des termes mathématiques en croate, et même en français, sont aussi influencées par le grecque ou le latin. L'exemple est le terme calcul, qui vient du latin et qui est utilisé en anglais et en français. Ce terme a deux options en croate – *izračun/računanje* et après avoir consulté la littérature, on a décidé d'utiliser le premier. Cependant, en parlant des modèles mathématiques, on mentionne le *λ-calcul*. Ici, on ne peut pas se servir de la traduction choisie ci-dessus, parce que dans la littérature mathématique professionnelle, on utilise *λ-račun.* La différence n'est pas grande, mais elle est importante.

Une autre particularité des sciences naturelles est que dans leurs disciplines, il existe beaucoup de noms propres. C'est parce qu'une nouvelle formule, un nouveau théorème, une invention ou une découverte va probablement être reconnue par la personne responsable de sa création. Mais ce n'est pas toujours le cas - *la théorie de la relativité* ne contient pas le nom de la personne responsable de sa création. Or, déjà dans notre titre, on a un nom propre, à savoir Gödel. A travers le texte, on mentionne des autres noms propres : Turing, Boole, Peano. Ce qui est important d'y retenir est que, même si les noms propres dans les formules ou théorèmes sont utilisés de manière automatique (c'est-à-dire qu'on ne pense pas à la personne qui les a créés, mais à la formule ou l'invention) et que ces noms sont peu à peu considérés des adjectifs (booléen, algèbre de Boole/kafkaïen, Kafka), il faut les toujours écrire en majuscule.

4.5.1. Consultation avec un expert en mathématiques

En outre, la traduction des termes *ensemble dénombrable/ensemble énumérable* nous posait quelques problèmes. C'était à cause de la traduction du verbe énumérer en croate. Le terme *énumération* est traduit par *numeracija* dans la littérature croate mathématique. Dans les dictionnaires généraux, ce mot est traduit par *nabrajanje.* Le terme *nabrojiv skup* n'existe pas dans la littérature croate. C'est une variation à laquelle il faut faire attention. Pourtant, les choses se sont un peu compliquées quand on a découvert que l'adjectif *énumérable* est traduit par *prebrojiv* en croate, tandis que l'*ensemble dénombrable* est traduit par *prebrojiv skup.* Nous avons consulté un expert en mathématiques qui nous a proposé d'utiliser le terme *denumerabilni skup* pour *ensemble énumérable.* Voici ce qu'il nous a écrit :

> *énumérable=prebrojiv (a ne nabrojiv).*
>
> *énumération = numeracija, indeksacija (a ne nabrajanje)*
>
> *nabrojivi skupovi=denumerabilni skupovi.*
>
> *Ensemble dénombrable=prebrojiv skup.*
>
> *Općenito, mislim da Google translate ovo dosta dobro prevodi. Recimo, prvo prevedeš s francuskog na engleski, a onda s engleskog na hrvatski.*
>
> *Međutim, neki termini se ne koriste (barem koliko ja znam): npr "nabrojiv" je termin koji nisam čuo da se koristi, već se koristi denumerabilan. Ali možda je u međuvremenu uveden u hrvatsku matematičku terminologiju, jer se te stvari znaju mijenjati s vremenom, pa to još provjeri. Ako i drugi autori koriste termin "nabrojiv", onda može ostati.*

Après avoir consulté l'expert, nous nous sommes engagés à mieux rechercher les termes qu'il nous avait proposés. Le résultat de recherches suivantes nous montre que le terme *denumerabilni skup* n'existe pas dans la littérature croate.

D'un autre côté, dans notre texte originel, l'auteur dit : *« Un ensemble A est énumérable s'il existe un programme P qui l'énumère »* et *« L'exemple le plus commun d'un ensemble infini énumérable est l'ensemble N des entiers naturels. Le programme qui l'énumère est l'un des premiers algorithmes qu'on apprend dans l'enfance : compter. Chaque n ∈ N sera, en principe, éventuellement nommé si on est disposé à compter assez longtemps. »* Ces informations sont très importantes parce que l'auteur nous donne un exemple des ensembles. Dans un texte croate, on lit, *"Rekurzivno prebrojivi skupovi su oni skupovi koji mogu biti generirani iz početnih točki (aksioma) ako na njih ponavljano primjenjujemo neka pravila. Skup prirodnih brojeva je rekurzivno prebrojiv skup. Početna točka od koje se kreće je brojka 1, a primjenom funkcije neposrednog sljedbenika dobivamo sve ostale brojeve. Takvi skupovi su beskonačni, ali prebrojivi, u smislu da se do bilo kojeg elementa može doći u određenom broju koraka (za razliku od skupa realnih brojeva)."* (Valeryev, 1999: 138). Dans les deux textes, on voit qu'en croate on utilise *rekurzivno prebrojiv skup* pour *ensemble énumérable.*

On peut trouver d'autres confirmations que *ensemble énumérable* est en fait *rekurzivno prebrojiv skup:" Za jezik L nad alfabetom Σ kažemo da je rekurzivno prebrojiv ili Turing-prepoznatljiv, ako postoji Turingov stroj M' s ulaznim alfabetom Σ, koji ulaznu riječ w nad Σ prihvaća točno kad je w ∈ L, a u suprotnom je ili odbacuje ili nikada ne staje. Kraće rečeno, M' prepoznaje jezik L."* (Doko et Novaković, 2006).

En plus: "*La fonction caractéristique χ d'un ensemble d'entiers E est la fonction définie par :*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ appartient à } E \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

E est dit décidable si sa fonction caractéristique est calculable, autrement dit si le prédicat "x ∈ E" est décidable. Mais il existe une autre façon de définir effectivement un ensemble d'entiers (c'est-à-dire de le définir par un algorithme) ; E est dit récursivement énumérable (souvent abrégé en re) si :

$$E = \{ f(0), f(1), f(2), \ldots \} = \mathbf{Val}\,(f)$$
où f désigne une fonction *calculable* totale.

*On dit que f énumère (les éléments de) E ; **Val** (f), ensemble des valeurs de f, est aussi appelé **Image** (f). L'adverbe récursivement correspond à un sens inhabituel de récursif :*

- *aujourd'hui une procédure récursive est une procédure qui fait appel à elle-même dans sa définition ; c'est une technique de programmation essentielle et courante ;*
- *autour de 1930, les logiciens (Church, Gödel, etc.) ont défini un modèle de calcul, où les fonctions calculables sont définies par application répétée de schémas simples dits récursifs (voir le chapitre 5 pour quelques détails, et des références) ; dans ce modèle, fonction récursive signifie donc fonction calculable, et récursivement énumérable signifie donc énumérable par un algorithme ; les tentatives de remplacer ce terme par un terme plus moderne (certains auteurs anglo-saxons emploient par exemple computationally enumerable, en abrégé ce ; on rencontre aussi l'expression effectivement énumérable) ont échoué en pratique." (*Betrema, s.d.)

Pour résoudre ce problème, on va mentionner une autre source en français utile: "*Par définition, un ensemble E est énumérable si et seulement s'il existe un programme qui énumère E . C'est à dire un programme de N vers E qui soit surjectif c'est à dire qui atteint tous les éléments de E , et qui soit totalement calculable c'est à dire d'arrêt sûr. Si on n'a pas cette dernière condition alors le programme est dit semi-énumérant E."*
(Mabboux-Stromberg, s.d.)

Après avoir considéré les passages en question et les définitions et les exemples qui y nous sont offerts, on peut conclure avec certitude que l'ensemble énumérable est en fait ensemble récursivement énumérable. Le terme *ensemble énumérable* n'existe pas dans la littérature française que dans le texte en haut, où ces ensembles sont définis comme les ensembles récursivement énumérables, dans la littérature français ainsi que dans la littérature croate. On comprend que, dans le texte originel, l'auteur a omis "récursivement*"* (délibérément ou non) et décidé à utiliser *ensemble énumérable.*

5 Conclusion

Les objectifs principaux de ce mémoire de master étaient de présenter des problèmes terminologiques surgissant d'un travail concret. Nous avons choisi les mathématiques comme domaine d'étude pour ce but. Nous avons tenté de définir la terminologie en relation avec d'autres disciplines connexes, telles que la terminographie, la terminotique, la linguistique et la lexicologie, et avons présenté un bref aperçu du développement de la terminologie en tant que discipline dans la première section. De plus, nous avons discuté et défini les termes de base.

La partie pratique de notre travail est composée de la traduction du français vers le croate, un glossaire d'environ 250 termes et 10 fiches terminologiques dans les deux langues, ainsi que d'un aperçu du sujet à l'étude avec les concepts clés. Avec l'utilisation de cette mémoire, nous avons considérablement augmenté nos connaissances de la terminologie et de la terminographie et du sujet à l'étude. Étant donné qu'il s'agit du sous-domaine de la logique, nous sommes conscients de l'importance cruciale de l'exactitude et de la précision dans ce type de travail. En conclusion, les terminologues ont beaucoup de responsabilités, il est donc essentiel qu'ils soient bien informés sur le domaine qu'ils décrivent.

6 Sources

6.1 Corpus

Vukas, Maja. 2006. *Gödelov teorem nepotpunosti*. Filozofski fakultet u Rijeci, Odsjek za filozofiju. https://www.ffri.hr/~trobok/Seminar_Vukas.pdf

Raduka, Marko. 2007. *Gödelovi teoremi nepotpunosti*. https://pazishkola.tripod.com/marko_decembar.pdf

Jelušić, Daniel. 2015. *Nepotpunost i neodlučivost aritmetike.* Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet [Master]. https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A5413/datastream/PDF/view

Fortier, Jérôme. 2016. Une preuve moderne du théorème d'incomplétude de Gödel. Département de mathématiques et de statistique, Université d'Ottawa Bulletin AMQ, Vol. LVI, no 3, octobre 2016. Consulter le : https://www.amq.math.ca/wp-content/uploads/bulletin/vol56/no3/05-godel.pdf

Cesar, Jean. 1980. *Un théorème fondamental de la logique mathématique.* IREM de Besançon. http://epiphymaths.univ-fcomte.fr/seminaire/Articles%20epiphymaths/cesar-le_theoreme_de_goedel-1980.pdf

6.2 Bibliographie

Betrema, Jean. s.d.. *Modèles de calcul.* Chapitre 4 : Ensembles récursivement énumérables. Master informatique— années 2003 à 2007. URL: https://www.labri.fr/perso/betrema/MC/index.html

Bouffard, Nicolas. *Théorie des nombres.* Université de Saint-Boniface.

Boutin-Quesnel, Rachel, Bélanger, Nycole, Kerpan, Nada, Rousseau, Louis-Jean. 1985. *Vocabulaire systématique de la terminologie*. Publications du Québec, Québec.

Cabré, Maria Teresa. 1999. *Terminology: Theory, methods and applications*. John Benjamins Publishing Company, Amsterdam/Philadelphia.

Cégielski, Patrick. 2016. *Histoire de la logique élémentaire.* Université Paris 12 - IUT de Sénart-Fontainebleau. URL : http://www.lacl.fr/cegielski/logique/histoireProp.pdf

CST. 2014. *Recommandations relatives à la terminologie*. Chancellerie fédérale, Section de soutien à la communication, Berne. URL: http://www.cotsoes.org/sites/default/files/public_files/CST_Recommandations_relatives_a_la_terminologie_2014.pdf

Delavigne, Valérie. 2002. « Le domaine aujourd'hui. Une notion à repenser. », in *Actes du séminaire « Le traitement des marques de domaine en terminologie »*, Cahiers du LCPE, Paris.

Dieudonné, Jean. s.d. « Analyse mathématique », *Encyclopædia Universalis* [en ligne], consulté le 13 octobre 2022. URL : https://www.universalis.fr/encyclopedie/analyse-mathematique/

Doko, Marko et Novaković, Vedran. 2006. I*zračunljivost i apstraktni strojevi*, Hrvatski matematički elektronski časopis, math.e URL: http://e.math.hr/old/izracunljivost/index.html

Dubuc, Robert. 2002. *Manuel pratique de terminologie*. Linguatech éditeur, Québec.

Felber, Helmut. 1987. *Manuel de terminologie*. Unesco, Paris.

Francœur, Aline. 2015. « La fiche terminologique, entre théorie et pratique », in *Langues et linguistique*, n°35, p. 24-39

Frege, Gottlob. 1884. *Les Fondements de l'arithmétique*. Traduction et introduction de Claude Imbert édition Seuil, collection : L'ordre philosophique (1969)

Gouadec, Daniel. 1990. *Terminologie – constitution des donnés*. Afnor, Paris.

L'Homme, Marie-Claude. 2004. *La terminologie : principes et techniques*. Presses de l'Université de Montréal, Montréal.

Humbert-Droz, J. 2014. *Le passage de termes d'une langue de spécialité à la langue générale : Le cas du domaine spatial* (Vol.) [Master].

Krečkova, Vlasta. 1997. *Les tendances de la néologie terminologique en français contemporain*. Études romanes de Brno

Krivine, Jean-Louis. 2007. *Théorie des ensemble.* Paris :Cassini.

Mabboux-Stromberg, Dominique. (s.d.). *Les ensembles énumérables.* URL*:* https://mabboux.pagesperso-orange.fr/Mathematique/ensemble_decidable.html

Osta Vélez, Matías (2014). *Logique, raisonnement et rationalité : le problème de la normativité chez Kant, Frege et la philosophie de la logique contemporaine. Philosophie. 2014. dumas-01101587* URL : https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01101587/document

Pavel, Silvia et Nolet, Diane. (2001). *Précis de terminologie*. Travaux publics et services gouvernementaux Canada, Ottawa.

Russo, François. (s.d.). « Géométrie », *Encyclopædia Universalis* [en ligne], consulté le 13 octobre 2022. URL : https://www.universalis.fr/encyclopedie/geometrie/

Michaël Cadilhac. Institute for Discrete Mathematics and Geometry Technical University of Vienna.

Thoiron, Philippe et Béjoint, Henri. 2010. « La terminologie, une question de termes ? », in *Meta : journal des traducteurs*, vol. 55, n°1, p. 105-118.

Valeryev, Pavle. 1999. K*akvi su ljudi kompjutori: neka otvorena pitanja kompjutacijskog* *pristupa u suvremenoj kognitivnoj znanosti.* Suvremena psihologija 2 (1999), l-2,127-152

Vézina, Robert, Darras, Xavier, Bédard, Jean, Lapointe-Giguère, Micheline. 2009. *La rédaction de définitions terminologiques*. Office québécois de la langue française, Montréal.

Vuković, Tihana. 2020. *Prebrojivost skupova.* Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku. Odjel za matematiku. Sveučilišni preddiplomski studij matematike. Završni rad.

Zafio, Massiva N. 1985. « L'arbre de domaine en terminologie », in *Meta : journal des traducteurs*, vol. 30, n°2, p. 161-168.

6.3 Sitographie

https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./b/baseincomplete.html

https://www.sketchengine.eu/

https://scienceetonnante.com/2013/01/14/le-theoreme-de-godel/

https://www.larousse.fr/

https://spoirier.lautre.net/logique

http://struna.ihjj.hr