Metakognitivno rezoniranje u matematičkom kontekstu

Putarek, Vanja

Doctoral thesis / Disertacija

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, University of Zagreb, Faculty of Humanities and Social Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Filozofski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:131:421909

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-26**

Filozofski fakultet
Sveučilišta u Zagrebu

Repository / Repozitorij:

ODRAZ - open repository of the University of Zagreb
Faculty of Humanities and Social Sciences

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

Sveučilište u Zagrebu

Filozofski fakultet

Vanja Putarek

METAKOGNITIVNO REZONIRANJE U MATEMATIČKOM KONTEKSTU

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2020.

Sveučilište u Zagrebu

Filozofski fakultet

Vanja Putarek

METAKOGNITIVNO REZONIRANJE U MATEMATIČKOM KONTEKSTU

DOKTORSKI RAD

Mentorica: prof. dr. sc. Vesna Vlahović-Štetić

Zagreb, 2020.

University of Zagreb

Faculty of Humanities and Social Sciences

Vanja Putarek

METACOGNITIVE REASONING IN MATHEMATICS

DOCTORAL THESIS

Supervisor: Vesna Vlahović-Štetić, PhD, Professor

Zagreb, 2020

Dr. sc. Vesna Vlahović-Štetić, red. prof.

Životopis

Vesna Vlahović-Štetić rođena je 1959. godine u Zagrebu gdje je završila osnovnu školu i XV. gimnaziju. Studij psihologije na Odsjeku za psihologiju Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu završila je 1982. godine, magistrirala 1986., a doktorirala je 1996. godine.

Od 1982. do 1987. godine bila je zaposlena kao asistentica na Odsjeku za psihologiju Filozofskog fakulteta u Zadru. Asistenticom na Odsjeku za psihologiju Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu postala je 1987. godine, 1996. izabrana je u zvanje više asistentice, 1998. u znanstveno-nastavno zvanje docentice, a 2002. godine u zvanje izvanredne profesorice. Redovitom profesoricom postala je 2007. godine, a u trajno zvanje izabrana je 2012. godine.

Nastavno je i znanstveno usmjerena na područje psihologije obrazovanja i školske psihologije. Uvela je nove kolegije u studij psihologije i nastavničke studije Filozofskog fakulteta i PMF-a. U okviru Poslijediplomskog studija psihologije vodila je kolegij *Psihologija učenja i poučavanja* i modul *Psihologija obrazovanja.* Sudjelovala je i u poslijediplomskoj nastavi drugih studija (Filozofski fakultet, Učiteljski fakultet, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Splitu). Od 2003. do 2009. godine vodila je Poslijediplomski stručni studij školske psihologije na matičnom Odsjeku.

Prof dr. sc. Vesna Vlahović-Štetić radila je na brojnim znanstveno-istraživačkim projektima kao suradnica i voditeljica. Objavila je više od 50 znanstvenih radova većinu u međunarodno referenciranim časopisima te dvadesetak stručnih radova. Suurednica je dviju knjiga te koautorica pet knjiga od kojih je jedna sveučilišni udžbenik, a druga priručnik Sveučilišta u Zagrebu.

Od 2002. do 2004. obavljala je funkciju zamjenice pročelnice Odsjeka za psihologiju. Od 2000 do 2015. godine bila je predstojnica Katedre za školsku psihologiju, a od 2015. do 2017. bila je pročelnica Odsjeka za psihologiju. Od 2017. godine obnaša dužnost dekanice Filozofskog fakulteta.

Dobitnica je više nagrada: „Snježana Biga Friganović“ (2014.), „Marulić: Fiat Psychologia“ (2015.), „Ivan Filipović“ u području znanstvenog i stručnog rada za 2014. godinu, te u području visokog školstva 2016. godine.

ZAHVALE

Na početku ovog rada htjela bih se zahvaliti ljudima bez kojih ovo doktorsko istraživanje ne bi bilo moguće.

Zahvaljujem se mentorici, prof. dr. sc. Vesni Vlahović-Štetić na razumijevanju mojih, često i pretjeranih, istraživačkih planova i strpljivosti u njihovom razmatranju. Osim toga, zahvaljujem se na idejama koje su mi pomogle u osmišljavanju istraživanja te poticanju i podršci u dodatnim usavršavanjima, osobito na odlazak na Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) u Zürichu koji mi je pomogao u razradi nacrta doktorskog istraživanja. Hvala mentorici na savjetima i životnim mudrostima, ugodnosti i susretljivosti u radu, zahvaljujući kojima će mi izrada doktorata ostati u lijepom sjećanju.
Nadalje, zahvaljujem se članovima povjerenstva na pomoći u planiranju istraživanja i povratnim informacija o doktorskom radu. Osobito se zahvaljujem i Uni Mikac i Mitji Ružojčiću na savjetima vezanih uz obradu podataka. Hvala i bivšim i sadašnjim članovima Odsjeka za psihologiju na emocionalnoj podršci u izazovnim trenucima tijekom izrade doktrata (Ajana, Inja, Jasmina, Lana, Maja, Maša, Nina, Saša… i brojni drugi).

Ogromnu nesebičnu pomoć u prikupljanju podataka pružili su mi Elena Boljkovac, Luka Juras, Matea Šoštarić, Lucija Šutić i Antonija Vrdoljak, a u dvostrukom kodiranju podataka Ivana Car. Psiholozi Ana Boban Lipić, Ivana Delač, Snježana Kovač, Mihael Kozina, Tajana Lovreković, Anđelka Mišura, Ana Ribarić Gruber, Marija Roth i Ivana Štefok omogućili su mi provedbu ispitivanja u školama i pomogli u njihovoj organizaciji. Ovim putem zahvaljujem se svima navedenima jer bez njih provedba istraživanja ne bi bila moguća. Zahvaljujem se i Ivani Martinić na pomoći u odabiru zadataka za istraživanje. Hvala i svim učenicima koji su sudjelovali u ovom istraživanju, rješavali matematičke zadatke i u većoj ili manjoj mjeri aktivirali svoje procesiranje Tipa 2.

Hvala Claire Sangster Jokić i Nadi Petrović na lektoriranju doktorata, čime su mi pomogle u povećanju jezične ispravnosti rada.

Zahvaljujem se i prijateljima (Adriana, Ana, Anja, Dunja, Danijela, Ema, Helga, Ines, Iva, Marija, Marina, Nina, Suzana, Tanja, Tara, Zrinka) koji su imali razumijevanja za moje

monologe o doktoratu, pružali mi podršku i utjehu, ohrabrenje i osmijeh kada god je to bilo potrebno.

Hvala i baki Mariji na pomoći koju mi je pružala tijekom cijelog mojeg obrazovanja.
Za kraj zahvala ostale su mi osobe za koje nijedna riječ nije dovoljno snažna da prenese zahvalnost koju osjećam prema njima.
Bez bezuvjetne ljubav koju su mi pružili moji roditelji i njihovog neprestanog poticanja da se razvijam kao osoba, ne bih danas pisala stranice ovog doktorata. Znam da oduvijek imaju povjerenja u mene i u moje postupke, ali i da su moja sigurna baza kojoj se uvijek mogu obratiti. Mama i tata - neizmjerno sam sretna da imam roditelje kao što ste vi!
Bratska ljubav kakvu sam dobila od svojeg brata nisam ni zamišljala da postoji: neprestana pomoć i savjeti, saslušanje mojih raznih briga, podnošenje mojih nerazumnih želja, nasmijavanje do suza. Ljudevit – oprosti na svim gnjavažama, nadam se da ću ti se moći odužiti!
I zadnjih nekoliko redaka želim posvetiti jednoj osobito važnoj osobi u mojem životu, zahvaljujući kojoj je moj život postao potpuno ispunjen. Moj Juraj izradio je program potreban za moje doktorsko istraživanje, a to je bio samo početak priče. Potpuno prihvaćanje i uvažavanje, empatija, pomaganje u svemu, tolerancija, sve u svemu, ogromna ljubav koju dobivam od svojeg Jurja učinili su me boljom verzijom mene. Juraj – neizmjerno sam ti zahvalna i sretna sam što si dio mojeg života i „srca“!

SAŽETAK

Iluzija proporcionalnosti predstavlja pogrešku da se svim odnosima pristupa kao da su proporcionalni, odnosno da se određene veličine shvaćaju proporcionalno povezanima čak i u situacijama u kojima to nije točno. Ova pogreška može se javiti zbog veće izloženosti učenika proporcionalnim nego neproporcionalnim odnosima te zbog veće intuitivnosti proporcionalnog modela rezoniranja nego neproporcionalnog. Upravo učestalo i intuitivno korištenje proporcionalnih odnosa dovodi do automatizacije proporcionalnog modela, a time i do stvaranja heuristika proporcionalnosti, koji bi, kao i ostali heuristici, mogao djelovati na dostupnost i salijentnost proporcionalnog modela te na metakognitivna iskustva prilikom rezoniranja. Stoga je važno ispitati pozadinske procese iluzije proporcionalnosti u okviru teorija dualnih procesa, koje su usmjerene upravo na ispitivanje razlike između automatizirane i refleksivne obrade informacija. Sukladno tome, cilj istraživanja bio je provjeriti postavke teorija dualnih procesa i meta-rezoniranja u području matematičkog rezoniranja o (ne)proporcionalnosti te ispitati može li se smanjiti iluzija proporcionalnosti uz pomoć pristupa koji se naziva produktivna pogreška. U istraživanju su sudjelovala 1083 učenika drugog i trećeg razreda općih i jezičnih gimnazija u Zagrebu. U predtestu smo kroz četiri zadatka ispitali proceduralno i konceptualno znanje učenika o (ne)proporcionalnosti. Oko tjedan dana kasnije, u glavnom je eksperimentu primijenjena produktivna pogreška na računalima, i to kroz početno samostalno rješavanje zadatka o neproporcionalnom odnosu i proučavanje riješenih primjera. Osim toga, učenici su rješavali 10 zadataka na računalima. Posttest je primijenjen oko tjedan dana kasnije i u njemu je na pet zadataka ponovno ispitivano proceduralno i konceptualno znanje učenika, ali i transfer znanja. Rezultati su pokazali da produktivna pogreška ima pozitivne učinke na smanjenje iluzije proporcionalnosti, ali da je učinak kratkotrajan. Iako su bili neuspješni u rješavanju zadataka o neproporcionalnom odnosu, učenici su detektirali konflikt između netočnog i točnog odgovora. Potvrđena je i važnost metakognitivnog osjećaja točnosti za refleksivno rezoniranje. Rješavanje zadataka u predtestu i posttestu pokazalo je sklonost učenika površnoj obradi informacija. Zaključno, produktivna pogreška mogla bi imati pozitivne učinke na smanjenje iluzije proporcionalnosti, ali bi njezinu primjenu trebalo modificirati u odnosu na primjenu o ovom istraživanju. Za dublju obradu informacija bilo bi važno tijekom poučavanja naglašavati važnost metakognicije, osobito metakognitivnih iskustava.

Ključne riječi: iluzija proporcionalnosti; meta-rezoniranje; metakognitivni osjećaj točnosti; produktivna pogreška; matematičke kompetencije

EXTENDED SUMMARY

Introduction

Mathematics is a key educational area and the acquisition of mathematical competences has far-reaching effects on an individuals' academic and professional development. The basic aspects of mathematical competence are conceptual knowledge, which represents the understanding of concepts and the relationships between these concepts (Baroody & Dowker, 2003), and procedural knowledge, which refers to the application of procedures in order to solve a problem or task (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001). While conceptual knowledge means "knowing that", procedural knowledge means "knowing how" (Byrnes & Wasik, 1991). Both types of knowledge are important for the development of adaptive expertise and success in mathematics. Since the 1980s, these two aspects of mathematical competences have been thoroughly studied (Hiebert & LeFevre, 1986; Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Specifically, researchers were focused on the relationship between conceptual and procedural knowledge, as well as the teaching methods that could improve these forms of knowledge.

There are four perspectives from which the relationships between conceptual and procedural knowledge have been examined and which aim to explain the order of acquisition of these two forms of knowledge: concept-first (Byrnes, 1992); procedure-first (Siegler & Stern, 1998); inactivation view (i.e., independent development; Haapasalo & Kadijevich, 2000); and iterative view (i.e., causal relationships are bidirectional; Rittle-Johnson et al., 2001). At present, the iterative perspective is most accepted in the literature, although research has shown that conceptual knowledge has a stronger influence on procedural knowledge than vice versa (Rittle-Johnson & Schneider, 2015).

In order to encourage the acquisition of conceptual and procedural knowledge, it is useful to adjust teaching methods in accordance with approaches that have been shown to be effective in research and practice. The two teaching methods for which positive effects on conceptual and procedural knowledge have been confirmed in recent research are contrasted comparison (or comparing solution methods/problems) and productive failure.

In contrasted comparison, students compare one procedure with a new procedure and, through this comparison, detect the key features of each procedure and differentiate between the two procedures (e.g., Rittle-Johnson & Star, 2007). Compared to the sequential presentation of procedures, the contrasted comparison method has been shown to be more effective on measures of procedural knowledge, procedural flexibility and conceptual knowledge.

Productive failure is based on the integration of guided discovery and direct instruction and is implemented in two phases: 1) students (individually or in a group) discover the solutions to problems; and 2) during instruction provided by teachers, students compare their solutions with the correct solutions, which leads to the discovery and correction of negative knowledge and an understanding of the basic concepts included in the lesson (Kapur, 2014, 2016). This method often includes contrasted comparison in the first or second phase and has been proven to be particularly effective in acquiring conceptual knowledge.

Since productive failure is a new approach in teaching mathematics and has been implemented most often in topics related to statistics (e.g., Kapur, 2014; Kapur, 2015a), it would be important to explore the contexts in which this approach has positive effects and whether it reduces or eliminates various systematic mathematical errors. One of these errors is the illusion of proportionality or linearity, which represents a propensity to comprehend certain sizes as proportionally related, even in situations where such understanding is not justified (De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2007). Proportionality is omnipresent in everyday life, as well as in various areas of mathematics. It is mostly intuitive and is taught before non-proportionality in mathematics education (Bocke et al., 2007; Ebersbach & Resing, 2008; Ministry of Science, Education and Sports, 2011). Therefore, increasing experience in solving proportional problems leads to automation in the application of proportional models. Automatic processes have been thoroughly examined within dual-process theories, which can add valuable insight into how this error in mathematical reasoning emerges and is maintained.

Dual process theories are focused on two modes of information processing, labelled *Type 1* and *Type 2*. Type 1 processing occurs automatically and engages minimal working memory. It is fast, effortless, inflexible and not influenced by verbal instructions (Evans & Stanovich, 2013; Stanovich & Toplak, 2012). Type 2 processing is slow and requires cognitive effort, thus engaging working memory. It is controlled, flexible, and younger in an evolutionary sense, can be taught verbally and is based on conscious thinking. According to the default-interventionist model, both Type 1 and Type 2 processing are activated every time people encounter information. Type 1 is activated automatically, while Type 2 follows afterwards and intervenes in four ways (Thompson, 2009). The first intervention indicates little or no further analysis of the initial response. The second type is rationalization, through which Type 2 processing analyses the initial response and subsequently justifies this response, regardless of its accuracy. The third intervention is the most demanding in light of its improvements to the

initial response. Finally, the fourth intervention is the failure of Type 2 processing because it generates an alternative response that is less satisfying than the initial response.

The theory of metacognitive reasoning assumes that the type of intervention applied depends on metacognition, often labelled Type 3 processing. More precisely, it has been proposed that metacognition is the mediator between Type 1 and Type 2 processing (Thompson, 2009). Among the various dimensions of metacognition, researchers have typically explored metacognitive experiences as *Type 3* processing, and the metacognitive feelings of rightness (FOR) and confidence in particular (where FOR is offered for an automatic answer, while judgment/feeling of confidence is estimated for a reflective answer). Recent studies have demonstrated that, when an individual has a strong FOR that the response that first comes to mind is correct, it is less likely that (s)he will reconsider that response later (Shynkaruk & Thompson, 2006; Thompson, Evans, & Campbell, 2013; Thompson & Johnson, 2014; Thompson, Prowse Turner, & Pennycook, 2011). In other words, Type 2 processing will only accept the initial response, without further analysis.

Research examining dual-process theories and metacognitive reasoning have usually used problems in which the first, intuitive and heuristic answer is logically or rationally incorrect (i.e., non-congruent problems). In this situation, participants mostly respond in line with the intuitive, rather than the logical or rational, answer (e.g., De Neys & Glumicic, 2008; Thompson et al., 2011). Although most people err in non-congruent problems, studies examining conflict detection have revealed that, while people do detect conflict between their heuristic answer and logical or rational principles, they do not disregard the heuristic answer due to inhibition failure (De Neys, 2012, 2014; De Neys, Moyens, & Vansteenwegen, 2010; De Neys, Vartanian, & Goel, 2008). In other words, people possess a good system for monitoring information processing. Moreover, De Neys (2012) suggests that Type 1 processing generates both a heuristic answer and an intuitive logical answer and, depending on the situation, one answer will prevail over the other. Confirmation of De Neys's (2012) ideas of intuitive logic is offered by research conducted by Bago and De Neys (2017), which demonstrated a high rate of logically correct answers (around 50%) generated by Type 1 processing.

Experimental manipulations with time constraints and a secondary problem revealed that proportional reasoning has heuristic characteristics (Gillard, Van Dooren, Schaeken, & Verschaffel, 2009a, 2009b). As such, it is not surprising that people often ignore mathematical principles and instead tend to respond in accordance with an intuitive, proportional answer.

Moreover, research conducted by Putarek and Vlahović-Štetić (2019) demonstrated that students can detect conflict between a heuristic or proportional answer and a mathematically correct (non-proportional) answer. However, the role of metacognitive feelings in the formation and maintenance of the illusion of proportionality should be further explored. Finally, the methods that are effective in improving mathematical competences (e.g., productive failure) have not been examined in the context of the illusion of proportionality.

The current study

The aim of this study was to examine the postulates of dual-process theories and meta-reasoning in the context of mathematical reasoning about proportionality and non-proportionality among second- and third-grade high school students (aged 16-17 years). Moreover, the aim was to examine whether productive failure can reduce the illusion of proportionality.

A two-response paradigm (e.g., Thompson, 2009; Thompson et al., 2011) was used. Namely, when a proportional or non-proportional problem was presented for the first time, students were requested to provide their first or intuitive answer (i.e., although there was no time limit, students were under time pressure to respond). When the problem was presented a second time, students were told that they could take as much time as they needed to respond and were encouraged to think carefully and to provide the correct answer. Three groups of students were exposed to the two-response paradigm. Students in the control group did not receive any information beyond the basic instructions, while the remaining two groups were exposed to productive failure. Specifically, one group of students exposed to productive failure received instructions and solved examples that were aimed at encouraging procedural knowledge, while the other group received instructions and solved examples that were aimed at encouraging conceptual knowledge. In order to examine whether first responding altered second responding, another three groups of students responded only once, without time pressure. Here, one group did not receive any information beyond the basic instructions while productive failure was used in the other two groups (in the same manner as in the groups exposed to the two-response paradigm).

For each problem, three possible answers were offered: the correct answer, a distractor (in non-proportional problems, the distractor represented a proportional answer to a non-proportional problem) and a “neither of these answers” option. The correct answer and the distractor were presented randomly as the first or second offered answer, while “neither of these

answers" was always presented as the third offered answer and was used to reduce guessing among students.

Finally, all students participated in a pre-test and a post-test that examined students' procedural and conceptual knowledge about proportionality and non-proportionality and, at post-test, degree of transfer.

In short, we examined whether students would be prone to the illusion of proportionality at pre-test, during the main experiment and at post-test. We hypothesized that students would mostly err in non-proportional problems and that their incorrect answers would be consistent with proportional reasoning. However, we assumed that students in groups exposed to productive failure would have more correct answers in non-proportional problems than students in the control groups and that they would not be prone to the illusion of proportionality.

Furthermore, we examined students' FOR and FJC, whether Type 2 processing would depend on FOR and whether students would detect conflict between heuristic and mathematically correct answers at the first and second response times (i.e., when they were exposed to time pressure and when they were given time to provide the correct answer). The hypotheses were as follows: 1) students would have higher FJC than FOR; 2) slower response time would be accompanied with lower FOR and FJC; 3) students would detect conflict between heuristic and mathematically correct answers at the first and second response times (i.e., they would exhibit lower FOR and FJC and a slower response time when selecting an answer consistent with proportional reasoning in non-proportional problems than when they selecting an answer consistent with proportional reasoning in proportional problems); 4) students with lower FOR would be more likely to change their answer and have a lower response time at the second response time than students with higher FOR.

Moreover, we examined whether students exposed to productive failure would demonstrate a greater gain in their procedural and conceptual knowledge from pre-test to post-test, as well as greater transfer in post-test, than students in the control groups. We assumed that students exposed to productive failure, and those receiving instruction that encouraged conceptual knowledge in particular, would improve their mathematical competencies more than students in the control groups.

Methods

Participants

Participants were 1083 high school students from four academic-track schools in Zagreb (67.7% were girls). A total of 694 students participated at all three points [pre-test, main experiment, and post-test]. Students were enrolled in the second and third grades (53.2% were second-grade students) at the time of participation. Participants' mean age was 16.32 years (*SD* = 0.65, range 15-18).

Materials

Pre-test and post-test

In the pre-test and post-test, students solved the same two problems, both of which measured procedural knowledge. One problem involved proportional relations between objects, while the other problem involved non-proportional quadratic relations. At post-test, there was an additional non-proportional problem involving cubic relations. The purpose of this problem was to examinee transfer. Two tasks were used to measure conceptual knowledge, where students compared proportional and non-proportional problem(s) and explained which mathematical concepts were represented by various parts of these problems.

Main experiment

At the beginning of the experiment, students exposed to productive failure solved a problem that involved non-proportional quadratic relations, while students in the control groups did not solve any problem nor read any already-solved examples. Afterwards, students in each experimental and control group solved 10 problems (5 proportional and 5 non-proportional quadratic problems; examples are presented below). Upon completion of each problem, students estimated FOR (for fast responding) and FJC (for reflective responding) on a scale from 1 (not at all confident) to 7 (highly confident). After solving all 10 problems, the sum of all correct answers was presented on the computer screen. Next, students responded to a number of sociodemographic questions, which included questions about general academic achievement and achievement in mathematics at the end of the previous school year. Finally, students' motivation to participate in the study and any anxiety or boredom experienced during the study were estimated using responses to questions on a scale from 1 ("do not agree at all") to 5 ("completely agree").

Example of a proportional problem:

Workers need 3 days in order to build a fence around a square-shaped playground where one side is 60 m long. How much time do the workers need to build a fence around a square-shaped playground where one side is 120 m long? The speed of work is the same in both cases.

a) 9 days
b) 6 days (correct answer)
c) neither of these answers

Example of a non-proportional problem:

There are 10 apple trees in a square-shaped orchard where one side is 5 m long. How many apple trees can grow in a square-shaped orchard where a side is 10 m long? The distance between the apple trees is the same in both orchards.

a) 40 apple trees (correct answer)
b) 20 apple trees
c) neither of these answers

Procedure

All data were collected in schools between December, 2017 and May, 2018. The researchers informed students that all data will be collected anonymously and that they are allowed to terminate their participation at any time during the assessment. Following a brief introduction, all students agreed to participate. Students solved problems individually in classrooms. The pre-test and post-test were administered in paper-pencil form, while a computer program was developed for the main experiment. This program contained all instructions and productive failure, 10 problems, sociodemographic questions, as well as questions about motivation and emotions. Students solved the problems in 15 to 30 minutes. The time lag between pre-test and main experiment and between main experiment and post-test was between seven and 10 days.

Results and discussion

At pre-test, results suggest that students were susceptible to the illusion of proportionality, where 29.2% of students did not correctly solve the non-proportional problem and most incorrect answers were consistent with proportional reasoning. In contrast, nearly all students solved the proportional problem correctly (93% correct answers). In regards to conceptual knowledge, students demonstrated surface information processing and a low level of connection and integration between conceptual knowledge and procedural knowledge. These latter results about conceptual knowledge are consistent with international PISA research (Braš Roth, Markočić Dekanić, & Markuš-Sandrić, 2017) and previous analyses of the Croatian educational system (Garašić, Radanović, & Lukša, 2018; Bregvadze & Jokić, 2013).

In the main experiment, students were mostly accurate in solving proportional problems, but inaccurate in solving non-proportional problems. Students exposed to productive failure (experimental groups) were equally likely to choose the correct answer and the answer in line with proportional reasoning, suggesting that students in these groups were less prone to the illusion of proportionality than those in the control group. Moreover, students in the experimental and control group increased their accuracy in non-proportional problems at the second response time, with students in the experimental groups demonstrating greater improvement than students in the control group. For proportional problems, students in control group demonstrated equal success rates as students in experimental groups, both in fast and reflective responding. It seems that productive failure had positive effects on students' non-proportional reasoning and deceased their tendency to use a proportional model for non-proportional problems, a finding consistent with our hypothesis. Given that students in the experimental groups were able to increase their accuracy under fast responding conditions, our results are also consistent with De Neys's (2012) model of intuitive logic, which proposes that Type 1 processing can generate not only a heuristic, but also a logical answer.

Students demonstrated higher FJC than FOR, a finding that is consistent with previous research (e.g., Ackerman, 2014; Shynkaruk & Thompson, 2006) and can be explained by students' beliefs about the relationships between response time and accuracy. While students demonstrated higher FOR and FJC when they solved problems faster, the correlation between these metacognitive feelings and response time was low. Therefore, it can be assumed that while answer fluency (represented by response time) is an important determinant of metacognitive

feelings, “top-down” processes and other metacognitive feelings (e.g., feeling of difficulty) also have an effect on FOR and FJC (Ackerman, 2014).

In both fast and reflective responding to non-proportional problems, students detected conflict between a heuristic answer and mathematical principles. This confirms the assumption that, while students have a “gut feeling” that they are wrong, they nevertheless err in non-proportional problems due to the salience of the proportional model and inhibition failure.

The postulates of the theory of metacognitive reasoning (Thompson, 2009) were also confirmed. Specifically, students with lower FOR were more likely to change their answer at the second response time than students with higher FOR. As a result, students who were more accurate at the first response time and had lower FOR were less accurate at the second response time compared to students who were equally accurate, but had higher FOR. In contrast, students who were less accurate during the first response time and had lower FOR were more accurate at the second response time compared to students who were equally accurate, but had higher FOR. Finally, students with lower FOR were slower to solve problems at the second response time than students with higher FOR. These results confirm the importance of metacognitive feelings in information processing and solving mathematical problems.

At post-test, students improved their accuracy in solving a non-proportional quadratic problem (50% correct answers). However, only 30.5% of students correctly solved the non-proportional cubic problem, suggesting that they were not successful in transfer. Experimental and control groups did not differ in their accuracy in solving problems at post-test, suggesting that productive failure had only short-term positive effects on deceasing the illusion of proportionality.

Conclusion

This research has demonstrated that, while productive failure has a positive effect on decreasing the illusion of proportionality, this approach should be modified (e.g., instructions should be provided by teachers and not only on a computer screen) in order to improve its long-term effects.

In order to examine the illusion of proportionality, the theory of metacognitive reasoning was implemented and its postulates were confirmed. Namely, the metacognitive feeling of rightness was demonstrated to be an important determinant of Type 2 processing. Furthermore,

the level of FOR can explain why students change their answers or stick with their original answers in a repeated response situation.

Our results suggest that deep information processing strategies could be improved among students. For instance, more problem-based learning might be useful for supporting conceptual change, the detection of anti-knowledge and for encouraging adaptive expertise. During lessons, teachers should also emphasize the importance of metacognition. In other words, students should not only have knowledge of theoretical facts and procedures, but also know how to learn and how to self-regulate their learning.

Keywords: illusion of proportionality; meta-reasoning; feeling of rightness; productive failure; mathematical competences

SADRŽAJ

1. UVOD ... 1
1.1. Konceptualno i proceduralno znanje ... 3
1.1.1. Odnos između konceptualnog i proceduralnog znanja ... 4
1.1.2. Mjere konceptualnog i proceduralnog znanja ... 5
1.1.3. Pristupi za poticanje konceptualnog i proceduralnog znanja ... 7
1.1.3.1. Korištenje usporedbi ... 8
1.1.3.2. Pogreške tijekom učenja ... 9
1.1.3.3. Učenje na temelju problema ... 11
1.1.3.4. Produktivna pogreška ... 14
1.2. Iluzija proporcionalnosti ili linearnosti ... 17
1.2.1. Istraživanja čimbenika koji smanjuju iluziju proporcionalnosti ... 21
1.2.2. Proporcionalnost i neproporcionalnost u hrvatskom kurikulumu i udžbenicima ... 24
1.2.3. Determinante iluzije proporcionalnosti ... 26
1.3. Teorije dualnih procesa/sustava ... 28
1.3.1. Obilježja tipova/sustava procesiranja informacija ... 28
1.3.2. Istraživanja obilježja dvaju tipova procesiranja informacija ... 32
1.3.3. Odnos između dvaju tipova procesiranja informacija ... 37
1.3.4. Detekcija konflikta ... 40
1.3.5. Procesiranje Tipa 3 i meta-rezoniranje ... 42
1.3.5.1. Model smanjivanja kriterija ... 43
1.3.5.2. Teorija metakognitivnog rezoniranja ... 48
1.3.6. Individualne razlike u procesiranju informacija ... 52
1.3.7. Iluzija proporcionalnosti, teorije dualnih procesa i matematičke kompetencije ... 55
2. CILJ ISTRAŽIVANJA, PROBLEMI I HIPOTEZE ... 60
3. METODOLOGIJA ... 63
3.1. Sudionici ... 63
3.2. Instrumenti ... 63
3.2.1. Predtest i posttest ... 63
3.2.2. Ispitivanje na računalima ... 64
3.3. Postupak ... 66
4. REZULTATI ... 69
4.1. Iluzija proporcionalnosti u predtestu ... 69
4.2. Iluzija proporcionalnosti i metakognitivno rezoniranje u ispitivanju na računalima ... 73
4.2.1. Produktivna pogreška ... 73
4.2.2. Iluzija proporcionalnosti ... 77
4.2.2.1. Preliminarne analize ... 77

4.2.2.2. Izraženost iluzije proporcionalnosti ovisno o izloženosti produktivnoj pogrešci.. 83
4.2.2.3. Metakognitivni osjećaj točnosti ... 91
4.2.2.4. Odgovor „nijedno od ponuđenoga“ ... 93
4.2.2.5. Detekcija konflikta ... 96
4.2.2.6. FOR i pokazatelji procesiranja Tipa 2 ... 97
4.2.2.6.1. FOR i točnost odgovora u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska 98
4.2.2.6.2. FOR i promjena odgovora u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska102
4.2.2.6.3. FOR i vrijeme odgovaranja u situaciji bez vremenskog pritiska ... 104
4.2.2.7. Rješavanje zadataka u skupinama s odgovaranjem samo bez vremenskog pritiska 104
4.3. Iluzija proporcionalnosti u posttestu ... 109
4.3.1. Rješavanje zadataka u posttestu u odnosu na predtest te ovisno o intervenciji na računalima ... 115
5. RASPRAVA ... 120
5.1. Predtest: iluzija proporcionalnosti i matematičke kompetencije učenika ... 120
5.2. Produktivna pogreška ... 122
5.3. Ispitivanje na računalima ... 125
5.3.1. Iluzija proporcionalnosti ... 125
5.3.2. Metakognitivni osjećaj točnosti ... 129
5.3.3. Odgovor „nijedno od ponuđenoga“ ... 132
5.3.4. Detekcija konflikta ... 133
5.3.5. FOR i pokazatelji procesiranja Tipa 2 ... 135
5.4. Posttest: iluzija proporcionalnosti i matematičke kompetencije učenika ... 138
5.5. Praktične implikacije ... 142
5.6. Ograničenja istraživanja ... 144
6. ZAKLJUČAK ... 146
7. LITERATURA ... 149
8. PRILOZI ... 171
Prilog 1 ... 171
Prilog 2 ... 174
Prilog 3 ... 175
Prilog 4 ... 176
Prilog 5 ... 183
Prilog 6 ... 184
9. ŽIVOTOPIS ... 185

1. UVOD

Uslijed ubrzanog tehnološkog razvitka koji se odvija u suvremenom društvu potreba za zaposlenima u STEM području (engl. *Science, Technology, Engineering, Mathematics*; znanost, tehnologija, inženjerstvo, matematika) neprestano raste (Kennedy i Odell, 2014). Međutim, u brojnim razvijenim državama broj osoba kvalificiranih za rad u STEM području i potrebe tržišta rada nisu usklađeni (Joyce i Dzoga, 2011; Wang i Degol, 2013). Budući da je manjak broja zaposlenih u STEM području povezan sa slabijim ekonomskim razvitkom države, obrazovanje učenika u zanimanjima iz STEM područja jedna je od gorućih tema diljem svijeta (Caprile, Palmén, Sanz i Dente, 2015), uključujući i Hrvatsku (Narodne novine, 2014).

Matematika je jedan od prvih predmeta iz STEM područja s kojim se učenici susreću u osnovnoj školi (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2011). Kontinuirano učenje matematike tijekom cijelog osnovnoškolskog obrazovanja, a kroz različite gimnazijske i strukovne programe i tijekom srednjoškolskog obrazovanja, ukazuje na važnost matematike za stjecanje kompetencija potrebnih za snalaženje u svakodnevnom životu i za obavljanje brojnih profesija i disciplina (McDonald, 2016). Primjerice, školski uspjeh u matematici tijekom osnovne i srednje škole prediktor je uspjeha na fakultetu, ali i kasnijih financijskih prihoda (Rose i Betts, 2001). Osim toga, on je povezan i s kompetencijama iz drugih područja, poput čitanja s razumijevanjem, što se objašnjava uključenošću lingvističkih sposobnosti, verbalnog razumijevanja, simboličkog rezoniranja, kao i općih kognitivnih sposobnosti kako u matematici tako i u čitanju (Chu, vanMarle i Geary, 2016; Lerkkanen, Rasku-Puttonen, Aunola i Nurmi, 2005; Peterson, Boada, McGrath, Willcutt, Olson i Pennington, 2017). Nadalje, tehnološki razvoj usko je povezan s matematikom i ona često pruža egzaktni jezik za prirodne znanosti, tehnologiju i inženjerstvo te omogućuje tehnološke inovacije (Glasnović Gracin i Burušić, 2017).

Usprkos važnosti matematike za svakodnevni i profesionalni život pojedinca, motivacija učenika za učenje matematike opada krajem osnovne škole (Gottfried, Fleming i Gottfried, 2001; Gottfried, Marcoulides, Gottfried i Oliver, 2009; Hidi i Harachiewisz, 2000; Young, Wendel, Esson i Plank, 2018). Sukladno tome, učenici nisu uključeni za vrijeme nastave iz matematike (npr. nisu koncentrirani, lako odustaju, ne pišu domaće zadaće; Martin, Anderson, Bobis, Way i Vellar, 2012), imaju negativne stavove prema matematici i iskazuju izraženu anksioznost vezanu uz matematiku, (Luttenberger, Wimmer i Paechter), te svrstavaju matematiku među najmanje zanimljive i najteže predmete (Jokić i sur., 2019). Budući da je motivacija učenika prediktivna za odabir zanimanja (Musu-Gillette, Wigfield, Harring i Eccles,

2015; Wang, 2013), dio intervencijskih istraživanja bio je usmjeren upravo na povećanje motivacije učenika (npr. na subjektivnu vrijednost zadatka, samoefikasnost, promjene atribucija) za učenje STEM predmeta, uključujući matematiku (Babarović, Pale i Burušić, 2018; Rosenzweig i Wigfield, 2016).

Osim niske motivacije, zabrinjavajući je čimbenik u obrazovanju u području matematike i matematička pismenost učenika. Matematička pismenost predstavlja formuliranje i tumačenje matematike u različitim kontekstima, matematičko zaključivanje, primjenu postupaka i pojmova, te prepoznavanje uloge matematike u svijetu (Braš Roth, Markočić Dekanić, Markuš Sandrić i Gregurović, 2013). PISA (engl. *Programme for International Student Assessment*) ispitivanje u 72 države pokazalo je da hrvatski učenici u dobi od 15 godina postižu ispodprosječne rezultate u matematičkoj pismenosti, odnosno da hrvatski učenici mogu izvršiti jasno opisane postupke i primijeniti jednostavne strategije, ali ne mogu integrirati znanja i povezati ih sa stvarnim životnim situacijama (Braš Roth, Markočić Dekanić i Markuš Sandrić, 2017; OECD, 2014, 2016).

U pozadini matematičke pismenosti nalaze se matematičke kompetencije učenika (Braš Roth i sur., 2013). Matematičke kompetencije ubrajaju se među osnovne kompetencije koje su važne za profesionalni i osobni rast i razvoj (The Council of the European Union, 2018). One uključuju komponente matematička znanja i vještine te uvjerenja ili stavove prema matematici i matematičkom načinu rezoniranja. Primjerice, matematičke kompetencije su znanje o brojevima i računskim operacijama, razumijevanje matematičkih pojmova i primjena matematičih postupaka u svakodnevnom životu (Kilpatrick, Swafford i Findell, 2001; Silver, 1986). Osim toga, matematičke kompetencije obuhvaćaju i pozitivan stav prema traženju dokaza i preispitivanju valjanosti zaključaka, adaptivno ili logičko rezoniranje te pozitivan stav prema matematici kao korisnom predmetu za svakodnevni život.

Kako bi se unaprijedile matematičke kompetencije učenika, kroz reforme obrazovanja u Hrvatskoj i inozemstvu nastoji se potaknuti kritičko mišljenje, fleksibilnost i inovativnost mišljenja te obrazovne sadržaje učiniti korisnima za profesionalni razvoj i svakodnevni život (European parliament, 2018; Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2018; U.S. Department of Education, 2016). Upravo su ovi ciljevi pokazatelj da obrazovne reforme uzimaju u obzir konstruktivistička načela te naglašavaju adaptivnu stručnost i u drugi plan stavljaju rutinsku stručnost (Hatano, 2003). Kod rutinske stručnosti učenici su brzi i točni u rješavanju poznatih zadataka i situacija, ali ne razumiju korištene pojmove (Harskamp i Suhre, 2007). Rutinska stručnost može biti u obliku ritualnog znanja, odnosno „isprazno“ poznavanja činjenica i postupaka, i inertnog znanja, odnosno znanja koje se ne povezuje sa svakodnevnim životom

(Meyer i Land, 2006). Kod adaptivne stručnosti učenici mogu primijeniti znanja na fleksibilan način, odnosno mogu procijeniti prikladnost postupaka, integrirati informacije, modificirati pristupe učenju i rješavanju problema te stvoriti nove (Hatano i Oura, 2003; Wineburg, 1998).

U inozemstvu su provedena brojna istraživanja koja su ispitivala načine poticanja matematičkih kompetencija (npr. Kapur, 2014, 2016; Kapur i Bielaczyc, 2012; Rittle-Johnson i Star, 2007, 2009; Star i Rittle-Johnson, 2009; Ziegler i Stern, 2016). Međutim, malo je istraživanja koja su povezivala matematičke kompetencije s pristranostima u matematičkom rezoniranju i rasvijetlila pozadinu tih pristranosti. Osim toga, intervencije korištene u inozemnim istraživanjima (npr. produktivna pogreška) do sada nisu primijenjene u Hrvatskoj.

1.1. Konceptualno i proceduralno znanje

Komponente matematičkih kompetencija koje su osobito važne za uspješnost u matematici i na koje ćemo se usmjeriti u ovom radu su konceptualno i proceduralno znanje (Hiebert i LeFevre, 1986).

Konceptualno znanje je apstraktno znanje o osnovnim principima i njihovim međusobnim odnosima u određenom području (Hiebert i LeFevre, 1986; Putarek, 2018). Mentalno je pohranjeno u obliku relacijskih reprezentacija (npr. sheme i semantičke mreže; Hiebert i LeFevre, 1986), a veze između informacija podjednako su važne kao i same informacije (Rittle-Johnson i Schneider, 2015). Ova vrsta znanja znači da osoba „zna nešto“ (engl. *knowing that*) (Byrnes i Wasik, 1991) i dostupna je za fleksibilne transformacije (Baroody i Dowker, 2003). Konceptualno znanje može biti implicitno i eksplicitno pa nije nužno dostupno za verbalizaciju (Rittle-Johnson i Alibali, 1999; Rittle-Johnson i Schneider, 2015).

Proceduralno znanje definira se kao znanje o različitim postupcima koji se primjenjuju prilikom rješavanja zadataka ili problema općenito (Byrnes i Wasik, 1991; Hiebert i LeFevre, 1986; Putarek, 2018; Rittle-Johnson, Siegler i Alibali, 2001). Ova vrsta znanja znači da osoba „zna kako“ (engl. *knowing how*) (Byrnes i Wasik, 1991). Proceduralno znanje može biti automatizirano u određenoj mjeri, ovisno o količini vježbe, što znači da se može koristiti uz malo kognitivnih resursa, ali to smanjuje fleksibilnost rješavanja problema (Johnson, 2003).

Navedene definicije pristupaju konceptualnom i proceduralnom znanju kao vrstama znanja, što je uobičajeni pristup u psihološkoj literaturi (Rittle-Johnson, Schneider i Star, 2015; Star i Stylianides, 2013). U literaturi koja se temelji na istraživanjima provedenima iz perspektive obrazovnih znanosti, konceptualno i proceduralno znanje definiraju se prema

kvaliteti, odnosno ovisno o tome koliko je osoba duboko obradila informacije i povezala ih. Prema tom shvaćanju, proceduralno znanje je površno, usko vezano uz kontekst u kojem se informacije stječu (Hiebert i Lefevre, 1986). Ono ne uključuje povezivanje informacija, dok konceptualno znanje može biti dubinski obrađeno jer uključuje povezivanje informacije. Međutim, suvremena literatura ističe da proceduralno znanje može uključivati fleksibilnost, što se naziva proceduralnom fleksibilnošću, te može biti dubinski obrađeno (Star, 2005). Stoga je uobičajenije i opravdanije govoriti o konceptualnom i proceduralnom znanju kao vrstama znanja, a ne o kvaliteti, jer obje vrste znanja mogu imati različite dubine obrade informacija i pristupa rješavanju problema (Rittle-Johnson i sur., 2015).

1.1.1. Odnos između konceptualnog i proceduralnog znanja

Osim različitih definicija konceptualnog i proceduralnog znanja, različite su i perspektive o redoslijedu njihovog javljanja i uzročno-posljedičnom odnosu između konceptualnog i proceduralnog znanja u matematici. Jedna perspektiva naglašava da se najprije razvija konceptualno znanje, i to ponajprije kroz neformalno iskustvo s numeričkim pojmovima (Gelman i Meck, 1983, 1986; Halford, 1993; Hardiman, Dufresne i Mestre, 1989; Hiebert i Wearne, 1986). Prema ovoj perspektivi, nakon razvoja konceptualnog znanja, kroz iskustvo rješavanja različitih problema, razvija se proceduralno znanje, ali bez razumijevanja matematičkih pojmova dolazi do pogrešaka u postupcima ili strategijama rješavanja zadataka (Brown i Van Lehn, 1982; Wynn, 1990). Ovu perspektivu podupiru istraživanja iz različitih matematičkih područja, od brojanja do jednostavne aritmetike i proporcija (Byrnes, 1992; Byrnes i Wasik, 1991; Cowan i Renton, 1996; Dixon i Moore, 1996; Perry, 1991; Siegler i Crowley, 1994; Siegler, Thompson i Schneider, 2011).

Suprotno tome, druga perspektiva pretpostavlja da se najprije razvija proceduralno znanje na temelju, primjerice, eksplorativnih pokušaja i pogrešaka, a iz njega se zatim generiraju pojmovi kroz procese apstrakcije (Alibali i Goldin-Meadow, 1993; Siegler i Stern, 1998). Ovu perspektivu, također, podupiru istraživanja iz različitih matematičkih područja, poput brojenja te operacija s razlomcima ili decimalnim brojevima (Briars i Siegler, 1984; Frye, Braisby, Love, Maroudas i Nicholls, 1989; Hiebert i Wearne, 1996; Peck i Jencks, 1981).

Treća perspektiva, koja je nazvana perspektiva inaktivacije (engl. *inactivation view*) (Haapasalo i Kadijevich, 2000), naglašava da se konceptualno i proceduralno znanje razvijaju nezavisno (Resnick, 1982; Resnick i Omanson, 1987).

Četvrta i danas najprihvaćenija perspektiva iterativna je perspektiva, prema kojoj je odnos između konceptualnog i proceduralnog znanja dvosmjeran, odnosno povećanjem jedne vrste znanja dolazi do porasta druge vrste znanja (Baroody, 2003; Rittle-Johnson i Siegler, 1998; Rittle-Johnson i sur., 2001). Prema ovoj perspektivi, znanja u nekom području međusobno se nadopunjuju pa se ne može očekivati da će se jedna vrsta znanja razvijati tek nakon što se druga vrsta znanja razvije, već se obje vrste znanja razvijaju istovremeno (Rittle-Johnson i sur., 2001). Također, ovisno o izloženosti djeteta pojmovima ili postupcima u okolini, najprije će se u većoj mjeri razviti konceptualno ili proceduralno znanje. Početni razvoj bilo koje od ovih dviju vrsta znanja praćen je razvojem druge vrste znanja (Rittle-Johnson i Siegler, 1998). Pritom je važno uzeti u obzir da konceptualno znanje ima veći utjecaj na proceduralno znanje nego obrnuto (Baroody, 2003; Hecht i Vagi, 2010; Matthews i Rittle-Johnson, 2009; Rittle-Johnson i Alibali, 1999). Stoga bi se tijekom poučavanja postupaka rješavanja zadataka veći naglasak trebao staviti na uočavanje pojmova koji su u podlozi postupaka kako bi konceptualno znanje dodatno potaknulo razvoj proceduralnog znanja (Rittle-Johnson i Schneider, 2015).

Iako istraživanja upućuju na veću važnost konceptualnog znanja, potrebno je uzeti u obzir individualne razlike među učenicima, ovisno o tome na koje znanje se više oslanjaju. Točnije, identificirano je pet klastera učenika: 1) učenici koji se više oslanjaju na proceduralno znanje nego na konceptualno, 2) učenici koji se više oslanjaju na konceptualno znanje nego na proceduralno, 3) učenici koji se oslanjaju podjednako i u velikoj mjeri na obje vrste znanja, 4) učenici koji imaju nisko razvijeno konceptualno znanje, bez da taj nedostatak kompenziraju proceduralnim znanjem, 5) učenici koji imaju nisko razvijeno proceduralno znanje, bez da taj nedostatak kompenziraju konceptualnim znanjem (Hallett, Nunes i Bryanta, 2010).

1.1.2. Mjere konceptualnog i proceduralnog znanja

Konceptualno znanje obično se procjenjuje implicitnim i/ili eksplicitnim mjerama (Rittle-Johnson i Schneider, 2015). U implicitne mjere ubrajaju se vrednovanje zadataka, poput točnosti prikazanog postupka ili rješenja, prijenos između različitih načina prikazivanja zadatka (npr. prikaz brojeva u obliku dijagrama) ili zadaci usporedbe različitih veličina. Prilikom primjene eksplicitnih mjera učenici trebaju definirati i/ili objasniti pojmove ili postupke (Rittle-Johnson i Schneider, 2015; Siegler i Stern, 1998; Vamvakoussi i Vosniadou, 2004). Neovisno o vrsti mjere, važno je da su zadaci učenicima relativno novi i da uključuju transfer pa učenici

u njima ne mogu primijeniti automatizirane postupke (Rittle-Johnson i Schneider, 2015; Rittle-Johnson i sur., 2001).

Proceduralno znanje najčešće se mjeri preko točnosti postupka ili rješenja, a ponekad i preko vremena rješavanja zadataka (Canobi, 2004; Rittle-Johnson i Schneider, 2015; Torbeyns, Verschaffel i Ghesquiere, 2004). Kao mjere automatiziranosti proceduralnog znanja često se koriste (Rittle-Johnson i Schneider, 2015): 1) paradigma dvostrukog rješavanja zadataka (npr. učenici trebaju smjestiti decimalni broj na brojevnom pravcu i istovremeno broje imena koja čuju kroz slušalice; Schneider i Stern, 2010); 2) asimetričnost pristupa, odnosno razlika u vremenu izvedbe za uvježbane i neuvježbane postupke (npr. vrijeme potrebno da se smjesti broj na brojevni pravac [uvježbani postupak] i vrijeme potrebno da se broj s brojevnog pravca prebaci u simbolički prikaz broja [neuvježbani postupak]; Schneider i Stern, 2010).

Iako su provedena brojna istraživanja o konceptualnom i proceduralnom znanju pomoću navedenih mjera, nijedna od njih nema zadovoljavajuća psihometrijska svojstva (Rittle-Johnson i Schneider, 2015). Naime, znanje je pohranjeno u dugoročnom pamćenju, a mjeri se preko opažljivog ponašanja pojedinca u određenoj situaciji. Pritom ta ponašanja mogu odražavati i druge kognitivne procese, ne samo znanje koje je predmetom mjerenja. Stoga je mjerenje konceptualnog i proceduralnog znanja na temelju navedenih indirektnih mjera potencijalno niske valjanosti.

U prilog tome govori i istraživanje Schenidera i Stern (2010) u kojem su korištene četiri mjere konceptualnog znanja (vrednovanje postupaka; reprezentacija ili prikaz decimalnih brojeva na dijagramu; usporedba brojeva, odnosno koji broj je veći; objašnjenja pojma decimalnog broja) i četiri mjere proceduralnog znanja (točnost; brzina; asimetričnost pristupa; dvostruko rješavanje zadataka). Za konceptualno razumijevanje učenici su slušali uputu u trajanju od četiri minute o najvažnijim obilježjima decimalnih brojeva. Proceduralna intervencija uključivala je uvježbavanje smještanja decimalnih brojeva na brojevni pravac, ali učenici nisu dobivali povratnu informaciju o točnosti jer bi na taj način mogli provjeravati svoje hipoteze i poboljšati konceptualno razumijevanje. Ovo istraživanje pokazalo je da hipotetske mjere ovih dviju vrsta znanja imaju nisku konvergentnu valjanost. Samo se za mjeru konceptualnog znanja „objašnjenje“ pokazalo da se povećala u grupi koja je bila izložena konceptualnoj intervenciji i za mjeru proceduralnog znanja „točnost“ da se povećala u grupi koja je bila izložena proceduralnoj intervenciji. Prema ostalim mjerama intervencije nisu imale učinak. Dakle, rezultati se razlikuju ovisno o tome koja se mjera uzima u obzir.

Nadalje, istraživanje je pokazalo da četiri mjere nisu dobro objašnjene latentnim faktorom konceptualnog, odnosno proceduralnog znanja, što pokazuje da pojedinačne mjere

odražavaju u većoj mjeri neke druge konstrukte, ne toliko konceptualno i proceduralno znanje. Latentni faktor konceptualnog znanja u većoj mjeri objašnjava pojedinačne mjere konceptualnog znanja, nego što proceduralno znanje objašnjava pojedinačne mjere proceduralnog znanja. Osim toga, četiri mjere konceptualnog znanja i „točnost“ (mjera proceduralnog znanja) bili su u visokim korelacijama, što znači da mjerenje konceptualnog znanja zahvaća i proceduralno znanje, i obrnuto. Preporučuje se stoga višemetodski pristup, a ne korištenje samo jedne izdvojene mjere (Schenidera i Stern, 2010).

1.1.3. Pristupi za poticanje konceptualnog i proceduralnog znanja

Dvije osnovne i najčešće korištene metode poučavanja su izravno poučavanje i vođeno otkrivanje (Clark, 2009; Wise i O'Neill, 2009). Zagovornici ovih dviju metoda desetljećima raspravljaju o njihovim prednostima i nedostacima, kao i o učinkovitosti jedne metode u odnosu na drugu metodu za različite ishode učenja kod učenika. Metoda izravnog poučavanja najčešća je metoda poučavanja u školama kod koje postoji visoki stupanj vođenja učenika od strane učitelja u stjecanju znanja i rješavanju zadataka (Roelofs, Visser i Terwel, 2003). Učitelji koriste tehnike izlaganja i uvježbavanja, odnosno učenici najprije dobivaju od učitelja strukturirane informacije, a zatim za sadržaje za koje je to potrebno uvježbavaju vještine (Wise i O'Neill, 2009).

Kao što je navedeno u uvodnom dijelu rada, suvremene reforme obrazovanja veći naglasak stavljaju na poučavanje metodom vođenog otkrivanja. Ova metoda temelji se na konstruktivističkim načelima te naglašava važnost samostalnog otkrivanja različitih načela i da učenici imaju početne pretpostavke o pojmovima koje mogu biti pogrešne, a koje se kroz ovu metodu mogu otkriti, a potom i modificirati (Loveless, 1998; Putarek, 2018). Naime, početna znanja mogu interferirati s procesom učenja (McNeil i Alibali, 2005), a kroz rasprave se ta pogrešna uvjerenja mogu otkriti i osoba dolazi do graničnog pojma koji otvara novi pogled na određeno znanje (Meyer i Land, 2006), čime može doći do konceptualne promjene (Eryilmaz, 2002). Konceptualna promjena predstavlja integraciju postojećih pojmova pojedinca i kanoničkih/znanstveno utemeljenih pojmova (Kapur, 2015a) ili, drugim riječima, proces restrukturiranja postojećeg znanja utemeljenog na svakodnevnom iskustvu i neformalnom učenju kako bi se to znanje uskladilo sa znanstvenim spoznajama (Vosniadou, 2007; Vosniadou, Vamvakoussi i Skopeliti, 2008). Pritom je, usprkos važnosti procesa otkrivanja za kvalitetno učenje, potrebno vođenje od strane učitelja, i to kroz poučavanje učenika o pojmovima i postupcima kako bi se ispravila pogrešna uvjerenja i prenijela adekvatna znanja

učenicima. Iako ova metoda zahtijeva veći kognitivni napor u odnosu na metodu izravnog poučavanja, ona dovodi do većeg transfera i razumijevanja sadržaja (Bonawitz, Shafto, Gweon, Goodman, Spelke i Schulz, 2011; Wise i O'Neill, 2009).

Pristupi koji su se pokazali učinkovitima za razvoj konceptualnog i proceduralnog matematičkog znanja uključuju kombinaciju obje metode poučavanja. Jedan od pristupa učinkovitih za razvoj matematičkih kompetencija je korištenje usporedbi (engl. *contrasted comparison*; *comparing solution methods* ili *comparing problems*). Drugi pristup je produktivna pogreška (engl. *productive failure*), koja naglašava važnost pogrešaka tijekom učenja i učenje na temelju problema (Putarek, 2018).

1.1.3.1. Korištenje usporedbi

Uspoređivanje različitih zadataka, primjera, slučajeva ili situacija jedan je od principa učenja koji potiče dubinsko razumijevanje podražajnog materijala (Gentner, 2005). Laboratorijska istraživanja u kognitivnom području pokazala su da uspoređivanje dva primjera (npr. učenje riječi kod djece; učenje strategija pregovaranja kod studenata) u većoj mjeri potiče i poboljšava učenje nego proučavanje jednog primjera ili proučavanje dva primjera nezavisno jednog od drugoga (Gentner, Loewenstein i Thompson, 2003; Gentner i Namy, 2004; Gick i Holyoak, 1983; Kurtz, Miao i Gentner, 2001; Loewenstein i Gentner, 2001; Namy i Gentner, 2002; Schwartz i Bransford, 1998; Silver, Ghousseini, Gosen, Charalambous i Strawhun, 2005).

Uspoređivanje zadataka i postupaka pokazalo se učinkovitim i u području matematike (Rittle-Johnson i Star, 2007, 2009; Star i Rittle-Johnson, 2009; Stigler i Hiebert, 1999). U istraživanjima su učenici, najčešće u parovima, proučavali riješene primjere i rješavali zadatke, pri čemu su bili izloženi različitim načinima prikazivanja riješenih primjera (npr. Rittle-Johnson i Star, 2007). Naime, neki parovi učili su gradivo iz linearnih jednadžbi tako da su proučavali riješene primjere prikazane sekvencijalno, odnosno imali su prikazana dva ekvivalentna zadatka jedan nakon drugoga te je jedan zadatak bio riješen standardnim postupkom rješavanja linearnih jednadžbi, a drugi zadatak kraćim (tj. učinkovitijim) postupkom. Drugi parovi imali su prikazan jedan zadatak riješen standardnim postupkom te odmah pored njega isti zadatak riješen kraćim postupkom. Kod oba postupka pored koraka bili su navedeni nazivi računskih operacija ili postupaka koji su provedeni. Prilikom proučavanja riješenih primjera, učenici su trebali odgovarati na pitanja koja su ih poticala na promišljanje o primjerima i korištenim postupcima. Kroz pitanja koja traže od učenika objašnjenja samima sebi o zadacima potiče se učenje i razumijevanje gradiva u većoj mjeri nego proučavanje primjera zadataka bez traženja

objašnjenja pojedinih postupaka (Bielaczyc, Pirolli i Brown, 1995; Chi, de Leeuw, Chiu i LaVancher, 1994). Osim proučavanja primjera, svi učenici bili su izloženi kratkom poučavanju od strane učitelja na početku nastavnog sata, koje je bilo jednako za sve učenike. Nakon proučavanja riješenih primjera uslijedili su zadaci za vježbu jer kroz rješavanje zadataka učenici mogu nadzirati svoj proces učenja, odnosno uočiti jesu li dobro razumjeli riješene primjere (Atkinson, Derry, Renkl i Wortham, 2000).

Kako bi se ispitalo djelovanje intervencije na matematičke kompetencije, svi su učenici najprije riješili zadatke koji su ispitivali početno konceptualno i proceduralno znanje, a zatim su kroz nekoliko dana sudjelovali u prethodno opisanoj intervenciji. Nakon toga, primijenjeni su testovi kao i na početku istraživanja kojima se ispitivalo konceptualno i proceduralno znanje.

Koristeći navedenu metodologiju, pokazalo se da je uspoređivanje postupaka učinkovitije za poticanje konceptualnog i proceduralnog znanja u odnosu na sekvencijalni pristup (Rittle-Johnson i Star, 2007) te u odnosu na uspoređivanje ekvivalentnih zadataka riješenih istim postupkom. Osim toga, uspoređivanje postupaka učinkovitije je u odnosu na uspoređivanje različitih zadataka riješenih istim postupkom za poticanje konceptualnog, ali ne i proceduralnog znanja (Rittle-Johnson i Star, 2009). Uspoređivanje se pokazalo učinkovitim za poticanje matematičkih kompetencija i kada su učenici učili individualno, a ne u parovima (Ziegler i Stern, 2016).

Kako bi uspoređivanje bilo učinkovito, potrebno je uzeti u obzir početnu razinu znanja učenika. Kod početnika u nekom području može doći do pada u konceptualnom i proceduralnom znanju nakon izloženosti pristupu uspoređivanja postupaka, dok kod učenika koji imaju usvojeno znanje o jednom načinu rješavanja zadataka dolazi do porasta u proceduralnom i konceptualnom znanju (Rittle-Johnson, Star i Durkin, 2009). Naime, radno pamćenje početnika u nekom području opterećeno je informacijama koje ti učenici obrađuju (npr. proučavanje dva nepoznata načina rješavanja zadataka i njihova usporedba) pa oni u konačnici ne usvajaju u potpunosti nijedan način rješavanja zadataka, kao ni njihovo razumijevanje. Stoga je preporučljivo da učenici najprije razumiju i uvježbaju jedan postupak, a tek nakon toga da uspoređuju taj postupak s nekim novim postupkom.

1.1.3.2. Pogreške tijekom učenja

Pogreške koje se javljaju tijekom procesa otkrivanja smatraju se sastavnim i važnim dijelom učenja (Kapur, 2008; Trninic, Wagner i Kapur, 2018), što su naglašavale i teorije kognitivnog razvoja Piageta i Vygotskog (Kapur, 2015a). Tako je prema Piagetu (1963;

Wadsworth, 1996) jedan od osnovnih mehanizama kognitivnog razvoja proces akomodacije do kojeg dolazi kada unutarnje sheme nisu usklađene s vanjskim podražajima. Nadalje, Vygotsky (1978) navodi da je tijekom razvoja i učenja potrebno uzeti u obzir zonu približnog razvoja koja označava razliku između sadašnjeg i višeg razvojnog stupnja. Kako bi se odredila granica između razvojnih stupnjeva, važno je ispitati što osoba zna i što ne zna ili ne može učiniti, odnosno u čemu griješi prilikom izvršavanja zadataka, a radom na pogreškama koje čini osoba može napredovati na viši razvojni stupanj (diSessa, 2006; Kapur, 2015a).

Važnu ulogu pogrešaka prilikom učenja istaknula je i Clifford (1979) u preglednom radu o teorijama koje proučavaju ulogu pogrešaka u ljudskom ponašanju i učenju, odnosno teorijama frustracije, reaktivnosti, naučene bespomoćnosti, atribucija i motivacije za postignućem. Prema Clifford (1979), pogreške mogu biti korisne za učenje, a tvrdnja „ništa nije toliko dobro koliko postizanje uspjeha“ može biti i štetna, jer ne potiče učenike na razumijevanje i uključivanje u proces učenja. Clifford (1984) je dovela u pitanje opravdanost trenda, koji je u to vrijeme prevladavao u psihologiji obrazovanja, kojeg ona naziva „trend protiv pogrešaka“ ili „trend anti-pogreške“, sugerirajući da postoje facilitirajući učinci pogreške, poput veće vjerojatnosti započinjanja obavljanja nekog zadatka, ustrajnosti u rješavanju zadataka, interesa i intrinzične motivacije.

Pristup učenja na temelju zastoja (engl. *impasse-driven learning*), također, naglašava važnost pogrešaka tijekom učenja. Zastoj se javlja kada osoba nema dovoljno znanja da postigne neki cilj ili ima dovoljno znanja, ali ne može odrediti koji bi način bio optimalan za postizanje cilja (VanLehn, 1999). Prema ovom pristupu, učenje je kvalitetnije ako učenici sami pokušaju doći do rješenja i kasnije kroz poučavanje uoče pogrešna uvjerenja, nego kada učitelji pružaju rješenja i ignoriraju pogreške, koje su sastavni dio učenja. U skladu s ovim idejama, istraživanja na studentima fizike pokazala su da su studenti koji su naišli na zastoj prilikom rješavanja zadataka bolje razumjeli pojmove tijekom poučavanja i kasnijeg rješavanja zadataka u odnosu na studente koji nisu naišli na zastoj (VanLehn, Siler, Murray, Yamauchi i Baggett, 2003). Zastoji u učenju i pogreške ključni su i za konceptualnu promjenu jer pomažu u otkrivanju pogrešnih početnih uvjerenja (Kapur, 2015a).

Iz navedenih prikaza o važnosti pogrešaka za učenje može se primijetiti da pogreške imaju pozitivan učinak na učenje, ali da pritom važnu ulogu imaju učitelji/stručnjaci. Kako bi vođenje bilo optimalno, povratna informacija od strane učitelja/stručnjaka treba biti pravovremena i sadržajno prikladna. Primjerice, u istraživanju Mathana i Koedingera (2003), sudionici kojima su učitelji dopustili da rade pogreške prilikom učenja i ispravljali ih s vremenskom odgodom brže su naučili gradivo, postizali su veći transfer i upamćivanje gradiva

u odnosu na sudionike kojima je učitelj odmah ispravljao pogreške, ne ostavljajući im prostora za učenje iz tih pogrešaka. Pretpostavlja se da odgođena povratna informacija manje opterećuje kapacitet radnog pamćenja u odnosu na povratnu informaciju koja se daje odmah nakon što se učini pogreška, omogućujući time uočavanje pogrešaka i samokorekciju (Schooler i Anderson, 1990). Osim za rješavanje zadataka, u istraživanju Schmidt i Bjork (1992) odgođena se povratna informacija pokazala korisnom za verbalno i motoričko učenje (npr. dugoročno upamćivanje informacija i za transfer naučenoga) u odnosu na situaciju u kojoj se povratna informacija daje za vrijeme učenja. Pritom je odgođena povratna informacija opisana kao oblik otežavanja učenja i stvaranja prepreka, a time i pogrešaka prilikom učenja. Međutim, potrebno je uzeti u obzir i predznanje učenika (Putarek, 2018). Točnije, učenici s manje predznanja više profitiraju od povratnih informacija koje dobivaju odmah nakon rješavanja zadataka, ali takve povratne informacije negativno utječu na matematičke kompetencije učenika koji posjeduju osnovna znanja o nekom sadržaju (Fyfe i Rittle-Johnson, 2016).

1.1.3.3. Učenje na temelju problema

Važnost pogrešaka tijekom učenja sastavni je dio pristupa razvijenog u okviru metode otkrivanja, koji se naziva učenje na temelju problema, a ponekad i iskustveno ili konstruktivističko učenje (Gijbels, Dochy, Van den Bossche i Segers, 2005; Kirschner, Sweller i Clark, 2006). Kod ovog pristupa poučavanje ne prethodi rješavanju problema, već učenici ili studenti rješavaju složene probleme na koje često postoji više točnih odgovora, ali je pritom prisutno vođenje od strane učitelja kako bi uz smjernice mogli doći do rješenja (Hmelo-Silver, 2004; Schmidt, Loyens, Van Gog i Paas, 2007). Time bi trebalo doći do dugotrajnijeg upamćivanja i dubljeg razumijevanja sadržaja pa se ovaj pristup naziva i produktivnim uspjehom (Kapur, 2016), što su istraživanja i potvrdila.

Primjerice, Needham i Begg (1991) tražili su od jedne grupe studenata da pokušaju odrediti rješenja prikazanih priča prije nego im je bilo rečeno rješenje. Od druge grupe su tražili da pokušaju upamtiti prikazane priče, nakon čega su im bila otkrivena rješenja. Studenti iz prve grupe postizali su bolje rezultate u odnosu na studente iz druge grupe na analognim zadacima. Dakle, kod njih je transfer postignut u većoj mjeri.

Nadalje, Schwartz, Chase, Oppezzo i Chin (2011) tražili su od jedne grupe učenika, u dobi od 13 i 14 godina, da generiraju formule na temelju usporedbe primjera. Učenici su u grupi mogli doći do ključnih pojmova uspoređujući pojedine primjere, a zatim su bili poučavani o pojmovima iz fizike. Druga grupa bila je poučavana o istim konceptima prije rješavanja

zadataka koji su uključivali usporedbu primjera. Pokazalo se da su učenici koji su generirali formule prije poučavanja postizali veći transfer nego učenici kod kojih su rješavanje zadataka i poučavanje primijenjeni u obrnutom redoslijedu.

U istraživanju DeCaro i Rittle-Johnson (2012), jedna skupina učenika nižih razreda osnovne škole najprije je bila poučavana o znaku jednakosti i jednakosti skupova, ali bez pokazivanja postupka rješavanja zadataka, a zatim su rješavali zadatke o jednakosti skupova. Druga skupina najprije je rješavala iste zadatke kao i prva skupina, a potom su bili poučavani na prethodno opisani način. Pokazalo se da je druga skupina koja je najprije rješavala zadatke, a potom bila izložena poučavanju, pokazala bolje konceptualno znanje o pojmu jednakosti u odnosu na prvu skupinu učenika. Međutim, učenici koji su najprije rješavali zadatke tijekom poučavanja procijenili su da lošije razumiju sadržaj nego učenici koji su najprije prošli fazu poučavanja. Pretpostavlja se da su učenici u početnoj fazi postali svjesni nedostataka u svojem znanju i pogrešnih shvaćanja postupaka ili pojmova pa su opreznije pristupili novim informacijama tijekom poučavanja.

Rezultati pojedinih istraživanja ne potvrđuju veće učinke kod primjene učenja na temelju problema na stjecanje znanja u odnosu na metodu izravnog poučavanja (Capon i Kuhn, 2004; Dochy, Segers, van den Bossche i Gijbels, 2003; Hmelo-Silver, 2004). Ovi rezultati mogu biti posljedica razlika u poučavanim pojmovima koji nisu jednako podobni za primjenu kod učenja na temelju problema, kao i razlika u kriterijima i mjerama matematičkih kompetencija te vrstama problema koji se koriste. Primjerice, zadaci koji su vrlo strukturirani ili su vrlo slabo strukturirani nisu podobni za učenje na temelju problema (Walker i Leary, 2009).

Istraživanja u području učenja na temelju problema u kojima su korištena računala pokazala su višeznačne rezultate. Primjerice, u nekim istraživanjima (npr. Glogger-Frey, Fleischer, Grüny, Kappich i Renkl, 2015a; Glogger-Frey, Kappich, Schwonke, Holzäpfel, Nückles i Renkl, 2015b) učenje na temelju problema imalo je pozitivan učinak na matematičke kompetencije. Međutim, neka istraživanja nisu potvrdila pozitivne učinke učenja na temelju problema kada je ono primijenjeno pomoću računala (npr. Şendağ i Odabaşı, 2009). Sudionici provedenih istraživanja najčešće su učili pomoću računala kod kuće, a informacije i zadatke dobili su ili na CD-u ili online (npr. preko sustava e-učenja Moodle). Pritom dio njih nije uopće koristio CD sa zadacima koje su dobili (Glogger-Frey i sur., 2015b). Dakle, učenici nisu učili pomoću računala u školi, već kod kuće bez nadzora nastavnika u istraživanjima u kojima je učenje na temelju problema primijenjeno na računalima i u kojima nisu pronađeni pozitivni učinci na matematičke kompetencije.

Jedna od pripremnih tehnika za učenje je reformuliranje ili proširenje zadanog zadatka ili problema te generiranje novih zadataka ili problema u određenoj situaciji (engl. *problem posing*; Silver, 1994). U istraživanju Kapura (2015b), ova tehnika primijenjena je u obliku generiranja pitanja i rješenja na temelju prikazanog primjera. Rezultati su pokazali da je generiranje rješenja učinkovitije od generiranja pitanja na mjerama konceptualnog znanja, dok na mjerama proceduralnog znanja nema razlike. Generiranje pitanja pokazalo se učinkovitijim na mjerama transfera, pa Kapur (2015b) sugerira da generiranje pitanja potiče aktivaciju šire baze znanja i potiče fleksibilno rezoniranje. Generiranje rješenja vjerojatno dovodi do aktivacije postojećeg znanja koje je u većoj mjeri kontingentno traženim pojmovima, povećavajući time konceptualno znanje učenika.

Konačno, među pripremama za učenje nalazi se i analiza sadržaja koji može pomoći u razumijevanju pojmova koji će se poučavati. Tako je u istraživanju Schwartza i Bransforda (1998) o pripremi za učenje, jedna skupina studenata analizirala različite priče uspoređujući pojedine primjere, a druga skupina studenata samo je čitala priče ili pisala sažetke. Nakon poučavanja o pojmovima iz kognitivne psihologije vezanima uz sheme i upamćivanje, studenti koji su uspoređivali različite primjere imali su bolje rezultate u zadacima u kojima je bilo potrebno primijeniti stečeno znanje tijekom poučavanja, ali i uočiti sličnosti s pričama koje su studenti analizirali ili čitali.

Daljnjom razradom tehnike pripreme za učenje u kontekstu rješavanja problema, definirane su faze od početnog otkrivanja rješenja problema u grupama, preko poučavanja kroz izlaganje od strane učitelja, do individualnog uvježbavanja vještina (Schwartz i Martin, 2004). Pritom se sugerira da učitelji tijekom faze otkrivanja rješenja pitaju učenike 1) da objasne što rade, 2) da objasne odgovaraju li rješenja do kojih su došli njihovim intuitivnim idejama, 3) da provjere jesu li rješenja specifična za jedan primjer ili bi se mogla generalizirati na više primjera. Koristeći ovu metodologiju prilikom učenja deskriptivne statistike kod učenika u dobi od 14 i 15 godina, Schwartz i Martin (2004) su pokazali da pronalaženje rješenja prije poučavanja dovodi do boljeg proceduralnog znanja i transfera u odnosu na metodu izravnog poučavanja, i to samo u slučaju kada je početno traženje rješenja integrirano s riješenim primjerima kasnije tijekom poučavanja.

Prethodno prikazana istraživanja sugeriraju da priprema za učenje kroz analizu sadržaja te početno samostalno ili grupno istraživanje i otkrivanje rješenja mogu doprinijeti kvalitetnom učenju i dubljem procesiranju informacija. Također, osobito korisnim pokazala se primjena usporedbe primjera tijekom početne faze traženja rješenja (npr. Roll, Aleven i Koedinger, 2009, 2011). Kada učenici analiziraju dva ili više slučaja/zadatka koji se razlikuju u nekom ključnom

obilježju, spremniji su uočiti i razumjeti definirajuća obilježja pojmova. Pritom je važno da su primjeri/zadaci što manje apstraktni, što manje specifični i bez nepotrebnih informacija (Schalk, Schumacher, Barth i Stern, 2017).

1.1.3.4. Produktivna pogreška

Kao što je ranije spomenuto, pristup produktivne pogreške uzima u obzir važnost pogrešaka tijekom učenja i učenje na temelju problema. Osim toga, uvažava i važnost metode izravnog poučavanja za uspješno usvajanje matematičkih kompetencija (Kapur i Toh, 2013). Točnije, produktivna pogreška uključuje kombinaciju samostalnog rješavanja zadataka i poučavanja od strane učitelja. Tako učenici u prvoj fazi samostalno pokušavaju riješiti zadatke i/ili doći do razumijevanja pojmova, a potom u drugoj fazi, kroz raspravu s učiteljem i drugim učenicima te poučavanjem od strane učitelja o pojmovima i postupcima, dolaze do boljeg razumijevanja sadržaja (Kapur, 2015a).

Učinkovitost produktivne pogreške, određena preko poboljšanja matematičkih kompetencija, potvrđena je u brojnim istraživanjima. Tako je produktivna pogreška učinkovita kada se primjenjuje i grupno i samostalno rješavanje zadataka (Kapur, 2012; Kapur i Bielaczyc, 2012; Kapur, Dickson i Toh, 2008), kao i kod učenika i nižih i viših matematičkih sposobnosti (Kapur i Bielaczyc, 2012). Osim toga, ona se pokazala učinkovitom i kada se koristi poučavanje u okviru obrnute učionice (engl. *flipped classrooms*; prijenos informacija odvija se kod kuće, često korištenjem online materijala, a na nastavi se potiču rasprave, uvježbavanje sadržaja, produbljivanje konceptualnog znanja) (Song i Kapur, 2017). Produktivna pogreška učinkovita je i kada se posttest primjenjuje naknadno, primjerice dan nakon primjene ovog pristupa (Kapur, 2012), što znači da se učinak produktivne pogreške ne može pripisati efektu recentnosti, odnosno lakoći prisjećanja informacija. Nadalje, Kapur i Bielaczyc (2011) pokazali su, koristeći sadržaje vezane uz statistiku, da su učenici izloženi produktivnoj pogrešci postigli bolje rezultate na posttestu u odnosu na učenike izložene metodi izravnog poučavanja. Dakle, samo izlaganje o ključnim obilježjima pojmova manje je djelotvorno od otkrivanja tih obilježja. Konačno, produktivna pogreška, kod koje učenici nisu dobivali pomoć od strane učitelja za vrijeme početnog rješavanja problema, bila je učinkovitija i u odnosu na metodu vođenog rješavanja problema, kod koje su učenici dobivali smjernice od učitelja za vrijeme početnog rješavanja problema (Kapur, 2011). Dakle, učenici izloženi produktivnoj pogrešci bili su uspješniji u posttestu u mjerama proceduralnog i konceptualnog znanja te transfera.

Važno je napomenuti da učenici izvještavaju kako je početno otkrivanje rješenja zadataka kognitivno zahtjevno (Kapur, 2014), što zagovornici teorije kognitivnog opterećenja (npr. Kirschner i sur., 2006; Sweller, Kirschner i Clark, 2007) ističu kao kritiku produktivne pogreške. Prema ovim kritičarima, zbog uključenosti radnog pamćenja u traženje rješenja, ono se ne može uključiti u pohranjivanje informacija u dugoročno pamćenje. U obranu pozitivnih učinaka kognitivnog opterećenja, jedan od začetnika pristupa produktivne pogreške, Kapur (2015a, 2016) navodi da aktivacija prijašnjeg znanja, do koje dolazi kroz produktivnu pogrešku, može osloboditi, a ne opteretiti kapacitete radnog pamćenja zahvaljujući boljem povezivanju postojećeg znanja i novog znanja.

Kognitivno opterećenje može se smanjiti analizom riješenih primjera zadataka prije poučavanja (Glogger-Frey i sur., 2015a; Tuovinen i Sweller, 1999), ali je pritom potrebno uzeti u obzir razinu znanja učenika. Naime, studenti koji su bili početnici u nekom području postizali su bolje rezultate na testovima ako su učili iz analiziranih primjera nego ako su otkrivali rješenja (Kalyuga, Chandler, Sweller i Tuovinen, 2001). Međutim, povećanjem znanja u nekom području, rješavanje problema prije poučavanja pokazalo se učinkovitijim u odnosu na proučavanje riješenih primjera. Osim toga, neka istraživanja nisu potvrdila prednost proučavanja riješenih primjera pred rješavanjem problema prije učenja (Glogger-Frey i sur., 2015b; Kapur, 2014)

Nadalje, prema jednoj od kritika, učenici kroz početno rješavanje problema mogu doći do pogrešnih rješenja, ali zbog IKEA efekta (tj. ljudi vrednuju više stvari koje sami naprave; Marsh, Kanngiesser i Hood, 2018; Norton, Mochon i Ariely, 2012), učenici vrednuju više rješenja koja sami generiraju nego rješenja koja im kasnije pokazuju učitelji i teže prihvaćaju rješenja prezentirana od strane učitelja (Glogger-Frey i sur., 2015a). Međutim, kao što je navedeno, istraživanja pokazuju da učenici poboljšavaju svoje matematičke kompetencije i transfer kada se koristi produktivna pogreška, i to u različitim područjima (Chowrira, Smith, Dubois i Roll, 2019; Kapur, Lee i Lee, 2017; Pathak, Kim, Jacobson i Zhang, 2011), što se ne bi dogodilo da ostaju kod svojih početnih rješenja.

Kritičari ističu da postoje metodološki nedostaci provedenih istraživanja, poput nepostojanja ili nedovoljno dobre usporedne grupe (Colliver, 2000; Kirschner i sur., 2006; Sweller i sur., 2007). Zbog postizanja realističnosti primjene intervencija (tj. produktivne pogreške), dosadašnja su istraživanja provedena u prirodnim uvjetima, zbog čega je mogućnost kontrole uistinu bila manja, a nacrti su najčešće bili kvazi-eksperimentalni (Kapur, 2016).

Na temelju provedenih istraživanja definirane su i smjernice za poboljšanje učinkovitosti produktivne pogreške. Produktivna pogreška učinkovita je jer uključuje aktivaciju početnog znanja učenika te se pogrešna uvjerenja ispravljaju kroz poučavanje, zajedno s objašnjavanjem i elaboriranjem pojmova (DeCaro i Rittle-Johnson, 2012; Kapur, 2014, 2016; Kapur i Bielaczyc, 2012). Stoga je vrlo važno da učenici postanu svjesni pogrešnog znanja ili znanja o tome koja rješenja nisu djelotvorna i zašto (Oser, Näpflin, Hofer i Aerni, 2012). Pritom je uloga povratne informacije od velike važnosti za stjecanje znanja i razumijevanje pojmova (Glogger-Frey i sur., 2015a), osobito kod dobro automatiziranih anti-znanja (Hung, Chen i Lim, 2009). Osim toga, važno je metakognitivno građenje skela i primjena usporedbe zadataka ili primjera, tijekom kojih učenici koriste samoobjašnjavanje i argumentiraju rješenja te uspoređuju vlastita rješenja s rješenjima drugih učenika (Collins, 2012; Roll, Holmes, Day i Bonn, 2012). Uz navedene usporedbe, važno je da učitelji uspoređuju rješenja koja su generirali učenici s postupcima koji su točni ili optimalni (Loibl i Rummel, 2014).

Zadaci bi trebali biti bogati informacijama i izazovni, ali ne previše izazovni kako ne bi došlo do odustajanja (Kapur, 2016; Loibl i Rummel, 2014). Također, učenici bi trebali dobiti uputu da generiraju što više rješenja koja ne moraju biti točna, čime se potiče aktiviranje šire baze znanja. Nadalje, da bi produktivna pogreška bila učinkovita, potrebno je uzeti u obzir zonu približnog razvoja učenika kako traženje rješenja ne bi bilo previše lagano ili teško za učenike, a time i nemotivirajuće (Collins, 2012). Primjerice, u istraživanju Glogger-Frey i suradnika (2015a), kod učenika u dobi od 13 i 14 godina otkrivanje početnog rješenja nije rezultiralo povećanjem interesa, što se može objasniti nedostatkom znanja o ispitivanim sadržajima iz fizike. Na ovom uzorku pokazalo se sljedeće: kada učenici nisu otkrili prikladna rješenja, imali su manji interes i niže procjene samoefikasnosti. Dakle, ako učenicima nedostaju znanja o nekom području, otkrivanje rješenja može biti nemotivirajuće.

Osim toga, potrebna je i odgovarajuća ciljna orijentacija učenika, kako bi bili skloniji učiti na temelju pogrešaka (Sinha i Kapur, 2019). Kada učenici pristupaju učenju iz perspektive ciljeva ovladavanja putem uključivanja[1] doživljavaju pozitivnije emocije nakon što učine pogrešku u odnosu na učenike koji imaju ciljeve izvedbe putem izbjegavanja[2] (Tulis i Ainley, 2011). Međutim, odnos između ciljnih orijentacija i učenja na temelje problema može biti i u obrnutom smjeru: uz učenje na temelju problema formiraju se ciljevi ovladavanja putem

[1] Ciljevi ovladavanja putem uključivanja odnose se na želju učenika da nauče što više iz nekog gradiva i manje im je važna ocjena ili uspoređivanje s drugima (McGregor i Elliot, 2002).
[2] Ciljevi izvedbe putem izbjegavanja odnose na strah od neuspjeha i učenici s izraženim ciljem izvedbe putem izbjegavanja se boje da će biti lošiji od drugih učenika (Elliot, McGregor i Gable, 1999).

uključivanja u većoj mjeri nego kod izravnog poučavanja (Belenky i Nokes-Malach, 2012). Naime, kod procesa otkrivanja važno je da učenici promišljaju o zadacima, uoče nedostatke u vlastitom znanju te da se pogreške smatraju sastavnim dijelom učenja, što smanjuje uspoređivanje s drugim učenicima i usmjerenost na ovladavanje sadržajem (Glogger-Frey i sur., 2015a).

Zaključno, produktivna pogreška pokazala se korisnom za poticanje matematičkih kompetencija, kao i za poticanje motivacije kod učenika, ali je pritom važno uzeti u obzir znanje učenika i početnu razinu motivacije (Sinha i Kapur, 2019). Budući da je produktivna pogreška noviji pristup u poučavanju, Kapur (2015a) navodi da je potrebno dodatno istražiti koji sve čimbenici doprinose varijacijama u djelovanju ovog pristupa (npr. obilježja učenika, obilježja interakcijskog procesa između učitelja i učenika) te istražiti na kojim sve sadržajima produktivna pogreška može biti primijenjena i imati pozitivan učinak na znanje i motivaciju učenika. Pritom je uočeno da su u pojedinim sadržajima pogreške u rješavanju zadataka često prisutne, a te pogreške mogu biti posljedica duboko „ukorijenjenih“ pristranosti u matematičkom rezoniranju, kao npr. u slučaju iluzije proporcionalnosti (Gillard, Van Dooren, Schaeken i Verschaffel, 2009a).

1.2. Iluzija proporcionalnosti ili linearnosti

Linearnost je sveprisutna u svakodnevnom životu, kao i u brojnim matematičkim područjima (npr. mjerenje veličina, proporcije, linearne jednadžbe, koordinatni prostor, statistika i vektori) (De Bock, Van Dooren, Janssens i Verschaffel, 2002, 2007; Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens i Verschaffel, 2003). Linearni odnosi mogu se reprezentirati funkcijom zadanom formulom $f(x) = ax$, pri čemu je a realni brojevi, $a \neq 0$ (Kurepa, 1989; Županović i Šorić, 2016). Za tu funkciju vrijede tzv. svojstva linearnosti $f(x + y) = f(x) + f(y)$ i $f(kx) = kf(x)$. Graf linearne funkcije je pravac (De Bock i sur., 2007; Županović i Šorić, 2016) i on prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava. Međutim, u novijoj hrvatskoj literaturi iz školske matematike, linearna funkcija prikazuje se formulom $f(x) = ax + b$, što je u matematici prikaz tzv. afine funkcije koja općenito ne zadovoljava svojstva linearnosti (Ilišević i Krivo, 2012; Županović i Šorić, 2016). Zbog ovih terminoloških neusklađenosti, u ovom radu ćemo funkciju u kojoj je $b = 0$ nazivati linearnom funkcijom u užem smislu riječi, a afinu funkciju zadanu formulom $f(x) = ax + b$, u kojoj b može biti bilo koji broj, nazvati linearnom funkcijom u širem smislu.

Linearni odnosi u užem smislu riječi mogu se opisati pomoću proporcija/razmjera (tj. jednakosti omjera dviju veličina; ako je $a : b = k$ te $c : d = k$, proporcija ili razmjer je jednakost $a : b = c : d$) pa se nazivaju i proporcionalnim odnosima (Jagodić i Sarapa, 2007). Kada je odnos između varijabli linearan u užem smislu ili proporcionalan, tada se promjenom za koeficijent k između varijabli mijenjaju i druge varijable za isti taj koeficijent. Primjer zadatka s linearnim (proporcionalnim) odnosom je sljedeći: „Farmer Marko treba 4 dana da okopa rub polja za sadnju krumpira oblika kvadrata koji ima duljinu stranice 100 metara. Koliko dana treba Marko da okopa rub polja za sadnju krumpira oblika kvadrata sa stranicom duljine 300 metara, uz jednake uvjete rada?“. Rub polja je opseg kvadrata, a opseg kvadrata proporcionalan je duljini njegove stranice. Kada su se stranice povećale za koeficijent k (k puta), broj dana potrebnih za okapanje ruba polja povećao se za isti koeficijent k. Dakle, odredimo kroz omjer 300 : 100 koeficijent k koji iznosi $k = 3$ pa izračunamo $\text{dani}_1 \cdot k = \text{dani}_2$, odnosno $4 \cdot 3 = 12$ dana.

Kada se povećanjem jedne veličine za koeficijent k, druga veličina smanjuje za isti taj koeficijent, i obrnuto, govorimo o obrnutoj proporcionalnosti (Jagodić i Sarapa, 2007). U ovom radu proporcionalni odnosi neće uključivati obrnutu proporcionalnost.

Kod nelinearnih ili neproporcionalnih odnosa, promjenom neke varijable za koeficijent k, druga varijabla, druge varijable ne mijenja se za isti taj koeficijent k (De Bock i sur., 2007). Sljedeći zadatak primjer je nelinearnog (neproporcionalnog) odnosa: „Farmer Marko treba 8 sati da zasadi krumpir na polju oblika kvadrata koji ima duljinu stranice 200 metara. Koliko sati Marko treba da zasadi krumpir na polju oblika kvadrata sa stranicom duljine 600 metara, uz jednake uvjete rada?“. Budući da se krumpir sadi po cijeloj površini polja, u ovom se zadatku ne uzima u obzir opseg polja, već njegova površina, a površina je u neproporcionalnom odnosu s duljinom stranice. Stoga se u ovom zadatku kroz omjer 600 : 200 može odrediti koeficijent povećanja stranice k koji iznosi $k = 3$, a obzirom na to da se radi o površini, koeficijent se kvadrira (tj. radi se o neproporcionalnom kvadratnom odnosu). Marko treba $\text{sati}_1 \cdot k^2 = \text{sati}_2$, odnosno $8 \cdot 9 = 72$ sata da zasadi krumpir na površini devet puta većoj od početne. Kada se radi o volumenu, odnosi se mijenjaju za k^3 (tj. radi se o neproporcionalnom kubnom odnosu).

Većina učenika zadatak o farmeru Marku koji sadi krumpir rješava netočno. Primjerice, u istraživanju De Bocka, Verschaffela i Janssensa (1998), zadatke poput prethodno prikazanog zadatka o neproporcionalnom odnosu točno rješava 2% učenika u višim razredima osnovne škole (12-13 godina) i 17% učenika na početku srednje škole (15-16 godina). Više od 80% učenika zadatke o neproporcionalnom odnosu rješava kao da se radi o proporcionalnom odnosu (tj. odgovaraju da Marko treba tri puta više sati, a ne devet puta više).

Pogreška da se svim spomenutim odnosima pristupa kao da su proporcionalni, odnosno da se određene veličine shvaćaju proporcionalno povezanima čak i u situacijama u kojima to nije točno, naziva se iluzija proporcionalnosti (De Bock i sur., 2007). Tako se u zadatku o farmeru Marku koji sadi krumpir iluzija proporcionalnost očituje u tendenciji učenika da ovaj zadatak rješavaju prema modelu proporcionalnosti. Dakle, učenici pristupaju zadatku tako da primijene funkciju zadanu formulom $f(x) = ax$. S obzirom na to da se u zadatku radi o neproporcionalnom kvadratnom odnosu, funkcija zadana formulom $f(x) = ax$ ne dovodi do točnog rješenja, već je potrebno koeficijent a (tj. koeficijent proporcionalnosti) kvadrirati.

Ponekad se ova iluzija naziva i iluzija linearnosti jer se funkcija zadana formulom $f(x) = ax$, na koju se učenici pretjerano oslanjaju, naziva i linearnom funkcijom (Ilišević i Krivo, 2012; Županović i Šorić, 2016). Međutim, kao što je ranije navedeno, ponekad se u literaturi funkcija zadana formulom $f(x) = ax + b$ (pri čemu b može biti i različit od nule), također, naziva linearnom funkcijom u širem smislu. Primjer zadatka u kojem se može primijeniti funkcija zadana formulom $f(x) = ax + b$ (pri čemu je $b \neq 0$) je tzv. afini problem: „Lokomotiva je dugačka 12 m. Ako vlak ima četiri jednaka vagona nakon lokomotive, dugačak je 52 m. Koliko je dugačak vlak ako ima osam takvih vagona?“ (točan odgovor je 92 m). Duljina lokomotive u ovom zadatku predstavlja b u navedenoj formuli $f(x) = ax + b$ (tj. $f(x) = 10x + 12$), a duljina cijelog vlaka ovisi o duljini pojedinog vagona x. Istraživanja su pokazala da osnovnoškolski učenici ovaj zadatak najčešće rješavaju pomoću proporcija i njihov najčešći odgovor je 104 m (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens i Verschaffel, 2005). Dakle, učenici se ne oslanjaju na linearnost u širem smislu riječi, već na proporcije i proporcionalne odnose. Stoga ćemo mi u ovom radu koristiti pojam iluzija proporcionalnosti, kako bismo istaknuli oslanjanje učenika na model proporcionalnosti.

Primjeri zadataka koji se, također, ne mogu svesti na omjere (poput prethodnog afinog problema), a učenici ih rješavaju pomoću proporcija su aditivni problemi i problemi s konstantom (Van Dooren, De Bock, Hessels i sur., 2005). Primjer aditivnog problema: „Ana i Jelena trče po atletskoj stazi jednakom brzinom, ali je Ana krenula nakon Jelene. Kada je Ana pretrčala pet krugova, Jelena je pretrčala 15 krugova. Koliko je krugova pretrčala Ana kada je Jelena pretrčala 30 krugova?“. Primjer problema s konstantom: „Mama je stavila tri ručnika na sušenje i oni su bili suhi nakon 12 sati. Baka je stavila šest ručnika na sušenje. Koliko dugo će se sušiti tih šest ručnika?“. Osnovnoškolski učenici zadatke najčešće rješavaju pomoću proporcija pa na prethodno prikazani aditivni problem odgovaraju 90 krugova (točan odgovor: 40) i na problem s konstantom odgovaraju 24 sata (točan odgovor je 12 sati).

Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja povećava se podložnost iluziji proporcionalnosti, i to do dobi od oko 13-14 godina, nakon čega se smanjuje, ali u potpunosti ne nestaje i uočava se kod studenta i odraslih (De Bock i sur., 2007; Esteley, Villarreal i Alagia, 2010; Van Dooren, De Bock, Hessels i sur., 2005). U jednom od rijetkih istraživanja koje je ispitivalo rodne razlike u iluziji proporcionalnosti, Vlahović-Štetić, Pavlin-Bernardić i Rajter (2010) nisu pronašli rodne razlike u uspješnosti rješavanja zadataka o neproporcionalnim odnosima.

Najveći broj istraživanja o iluziji proporcionalnosti proveden je u području geometrije pomoću zadataka koji su se odnosili na promjene u veličini geometrijskih likova u obliku kvadrata i kruga te nepravilne likove. Opseg, površina ili obujam likova nisu bili izravno spomenuti u zadatku, već su učenici sami trebali prepoznati da, primjerice, rub označava opseg, a cijelo polje površinu (De Bock i sur., 1998, 2007). Međutim, čak i kada su u zadacima izravno spomenuti opseg ili površina, učenici su bili podložni iluziji proporcionalnosti. Primjerice, u istraživanju Van Doorena, De Bocka, De Bollea, Janssensa i Verschaffela (2003), zadaci su bili postavljeni tako da se od dijela učenika izravno tražilo da izračunaju opseg, površinu ili obujam, dok su drugi učenici rješavali neizravno postavljene zadatke. Pokazalo se da učenici podjednako (ne)uspješno rješavaju izravno i neizravno postavljene zadatke, što ukazuje na izraženost iluzije proporcionalnosti, a ne pogrešno razumijevanje učenika o tome što se od njih traži u zadatku.

Osim u geometriji, istraživanja su provedena i u području probabilističkog rezoniranja, odnosno, u području teorije vjerojatnosti. U istraživanju Van Doorena, De Bocka, Depaepea i suradnika (2003), korišteni su zadaci u kojima su učenici u dobi od 15-16 i 17-18 godina rješavali zadatke u kojima su trebali procijeniti vjerojatnost dobivanja određenog broja u bacanju kocke. U tzv. kvantitativnim zadacima (npr. „Bacao/la sam kocku nekoliko puta. Ako bacim kocku 12 puta, tri puta je veća vjerojatnost da dobijem najmanje dva puta broj šest nego u slučaju da bacim kocku četiri puta.“), učenici su odgovarali s točno ili netočno. Učenici su rješavali i tzv. kvalitativne zadatke u kojima su samo trebali procijeniti je li vjerojatnost dobivanja nekog broja veća, jednaka ili manja od vjerojatnosti dobivanja nekog drugog broja (npr. „Bacao/la sam kocku nekoliko puta. Ako bacim kocku četiri puta, vjerojatnost da dobijem broj tri najmanje je dva puta veća/jednaka/manja nego u slučaju da bacim kocku pet puta.“). Učenici su trebali i objasniti svoje odgovore na papiru na kojem su rješavali zadatke. U kvalitativnim zadacima broj točnih odgovora bio je veći nego u kvantitativnim zadacima te je većina netočnih odgovora (87.5% kod mlađih učenika i 75.3% kod starijih učenika) odražavala

model proporcionalnosti, što pokazuje da je i u probabilističkim zadacima prisutna iluzija proporcionalnosti.

1.2.1. Istraživanja čimbenika koji smanjuju iluziju proporcionalnosti

U nekoliko istraživanja nastojalo se kod učenika potaknuti dublje razmišljanje o zadacima, i na taj način umanjiti sklonost prema iluziji proporcionalnosti, korištenjem dviju metoda: metodom izazivanja kognitivnog konflikta te metodom definiranja zadataka na autentičan i realističan način.

Što se tiče kognitivnog konflikta, De Bock, Verschaffel i Janssens (2002) su koristili vizualnu i/ili metakognitivnu pomoć u rješavanju zadataka. Vizualna pomoć odnosila se na crteže likova koji su bili prikazani uz svaki zadatak. Kada je korištena metakognitivna pomoć, učenicima je na početku testa izazvan kognitivni konflikt rješavanjem jednog zadatka o neproporcionalnim odnosima od strane dva imaginarna vršnjaka na dva načina, primjenjujući model proporcionalnosti i neproporcionalnosti. U istraživanju su sudjelovali učenici u dobi 12-13 godina, koji su bili ravnomjerno podijeljeni u skupine prema uspjehu na posljednjoj provjeri znanja iz matematike, na temelju broja sati koje tjedno provedu učeći matematiku, kao i prema usmjerenju učenika. Pokazalo se da učenici uz vizualnu i metakognitivnu pomoć postižu bolje rezultate na zadacima o neproporcionalnim odnosima, pri čemu je pomak, u odnosu na kontrolnu skupinu, bio relativno mali.

U istom istraživanju ispitivano je djelovanje formuliranja zadatka na iluziju proporcionalnosti. Naime, dio učenika rješavao je zadatke kakvi se najčešće koriste tijekom učenja o proporcionalnosti, odnosno zadatke s podatkom koji nedostaje (nepoznanica x rješenje je proporcije, npr. $a/b=c/x$; npr: Alenu treba 7 sati da podreže živicu oko vrta oblika kvadrata kojemu je stranica duljine 40 m. Koliko bi mu vremena trebalo da podreže živicu oko vrta istog oblika kada bi on imao šest puta dulju stranicu?“). Drugi dio učenika rješavao je zadatke usporedbe (npr. „Farmer okopava zemlju za sadnju mrkve oblika kvadrata. Sljedeći tjedan treba okopati zemlju za sadnju krumpira, isto oblika kvadrata, koja ima stranicu dva puta veću. Koliko će više vremena trebati farmeru da okopa zemlju sljedeći tjedan?“). De Bock, Verschaffel i Janssens (2002) su utvrdili da učenici bolje rješavaju zadatke o neproporcionalnim odnosima kada su oni definirani kao zadaci usporedbe nego kada su definirani kao zadaci s podatkom koji nedostaje. Međutim, rezultati istraživanja su pokazali da su učenici lošije rješavali zadatke o proporcionalnim odnosima kada su oni bili definirani kao zadaci usporedbe. Pritom su učenici i dalje pogrešno rješavali oko 50% zadataka o neproporcionalnim odnosima.

Stoga se može zaključiti da je iluzija proporcionalnosti dijelom rezultat načina formuliranja problema, ali i da ona predstavlja duboko usvojenu pristranost u matematičkom rezoniranju.

Još je jedan načina izazivanja kognitivnog konflikta primijenjen u istraživanju De Bocka, Van Doorena, Janssensa i Verschaffela (2002). U ovom istraživanju provedeni su intervjui s učenicima u dobi od 12-13 i 15-16 godina na način da je učenicima prikazan zadatak i uz tekst zadatka bili su prikazani crteži likova, u ovom slučaju Djeda Božićnjaka. Uzimajući u obzir da učenici daju odgovore prema modelu proporcionalnosti na zadatke o neproporcionalnim odnosima, čak i uz crtež likova (De Bock i sur., 1998), crteži u ovom istraživanju nisu imali svrhu izazivanja kognitivnog konflikta, već samo pružanja pomoći u rješavanju preko vizualizacije sadržaja. Učenici su trebali objasniti svoj odgovor i razmišljati na glas prilikom rješavanja zadatka. Ako bi nakon prikazivanja zadatka učenici pogrešno odgovorili na zadatak, prelazilo se u sljedeće faze intervjua u kojima se kod učenika nastojao izazvati kognitivni konflikt. Tako je u drugoj fazi bio prikazan imaginarni postotak učenika koji daju određeni odgovor na zadatak, pri čemu je jedan prikazani odgovor odražavao proporcionalni odnos, a drugi neproporcionalni odnos. U slučaju da učenik i dalje ne bi točno odgovorio na zadatak, prelazilo se u treću fazu u kojoj je učenicima bilo prezentirano objašnjenje odgovora. Taj je odgovor odražavao neproporcionalni odnos, a ponudio ga je imaginarni vršnjak. Nakon toga, u četvrtoj fazi, prikazalo se nepravilne likove u kvadratnom okviru, a u petoj fazi intervjuer je tražio od učenika da odgovori na njegova konkretna pitanja o liku i kvadratu u kojem se nalazi (npr. tražilo se od učenika da izračunaju površinu kvadrata i da usporede površine dvaju kvadrata). U prvoj fazi dva su učenika točno riješila zadatak, dok je 38 učenika dalo netočan odgovor koji je odražavao proporcionalni odnos. Na kraju istraživanja četiri učenika nisu uspjela točno riješili zadatak, što pokazuje da su kognitivni konflikti bili učinkoviti.

Kognitivni konflikt primijenjen je i u istraživanju Vlahović-Štetić i suradnika (2010) kod učenika u dobi 15-16 i 18-19 godina. Korišteni su zadaci višestrukog izbora, s pet ponuđenih odgovora, u kojima je jedna grupa rješavala zadatke o neproporcionalnosti koji su među distraktorima imali ponuđeni odgovor koji je odražavao proporcionalni odnos, dok druga grupa nije među distraktorima imala ponuđeni odgovor koji je odražavao proporcionalni odnos. U zadacima o neproporcionalnim odnosima uspješniji su bili učenici koji nisu imali ponuđeni odgovor sukladan proporcionalnosti u odnosu na učenike koji su imali ponuđeni odgovor sukladan proporcionalnosti. Dakle, način postavljanja zadataka može potaknuti učenike na razmišljanje i povećanje točnosti u rješavanju zadataka o neproporcionalnim odnosima.

Osim kognitivnog konflikta, istraživan je i utjecaj autentičnosti i realnosti konteksta na iluziju proporcionalnosti. De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren i Claes (2003) su proveli istraživanje u kojem su prije rješavanja zadataka prikazivali video isječke o Gulliveru, pri čemu su naglasili učenicima da se usmjere na odnos veličine Liliputanaca i Gullivera. Zadaci su zatim postavljeni u kontekst priče o Gulliveru. Za razliku od očekivanog pozitivnog učinka autentičnosti konteksta i povezivanja zadataka s vizualno prezentiranim sadržajem, pronađen je negativni učinak, osobito s obzirom na uspješnost rješavanja zadataka o neproporcionalnim odnosima. Ovakvi rezultati mogu upućivati na pogrešno odabran video sadržaj, kao i na sam medij prezentiranja autentičnog konteksta. Naime, moguće je, da kada se sadržaj prezentira pomoću videa, učenici ulažu manje kognitivnog napora u procesiranje informacija, usmjeravaju manje pažnje na sadržaj i video sadržaje percipiraju kao lakše od pisanih sadržaja. Navedeni čimbenici bi mogli potaknuti učenike da zadatke rješavaju bez dublje i analitičke obrade.

Kada su zadaci prezentirani pomoću realnih, vidljivih i opipljivih materijala, učenici su manje skloni iluziji proporcionalnosti. Primjerice, u istraživanju Van Doorena, De Bocka, Janssensa i Verschaffela (2005), učenici šestih razreda, koji su u prvom dijelu istraživanja bili podložni iluziji proporcionalnosti, pozvani su na intervju u okviru kojeg su im prikazani realni materijali, poput poda kuće za lutke i učenici su mogli izmjeriti taj pod. U odnosu na situaciju u kojoj su učenicima za vrijeme intervjua zadaci prikazani na uobičajeni način i učenike kojima su bili prikazani crteži uz zadatke, rukovanje realnim materijalima potaknulo je kod učenika veću uspješnost u rješavanju zadataka o neproporcionalnim odnosima.

Konačno, u istraživanju Van Doorena, De Bocka, Hesselsa, Janssensa i Verschaffela (2004) kod učenika u dobi od 13 i 14 godina u 10 jednosatnih nastavnih jedinica poticao se kognitivni konflikt, metakognitivna svjesnost, kao i motivacija kroz realistične i zanimljive zadatke. Istovremeno je kontrolna skupina prolazila kroz uobičajene nastavne jedinice. U eksperimentalnoj je grupi učinkovitost u rješavanju zadataka o neproporcionalnim odnosima prema modelu proporcionalnosti značajno pala, dok su neki učenici počeli rješavati zadatke o proporcionalnim odnosima prema modelu neproporcionalnosti. To pokazuje da ti učenici nisu u potpunosti razumjeli proporcionalnost i neproporcionalnost te su stoga nekritički primjenjivali novostečeno znanje o neproporcionalnosti.

Na temelju provedenih istraživanja može se zaključiti da je iluziju proporcionalnosti teško smanjiti promjenama u formulaciji zadataka, ali i da su pristupi koji su usmjereni na razumijevanje zadataka i izraženiji kognitivni konflikt rezultirali barem malim pozitivnim pomacima s obzirom na uspješnost u rješavanju zadataka o neproporcionalnim odnosima. Pristup koji još nije korišten u pokušajima smanjenja iluzije proporcionalnosti je produktivna

pogreška. Budući da produktivna pogreška dovodi do poboljšanja matematičkih kompetencija, ponajviše konceptualnog znanja (Kapur, 2015a), u ovom istraživanju provjerili smo može li produktivna pogreška smanjiti sklonost učenika da zadatke o neproporcionalnim odnosima rješavaju prema modelu proporcionalnosti, a da se pritom ne smanji njihova uspješnost u rješavanju zadataka o proporcionalnim odnosima, kao što je bio slučaj u istraživanju Van Doorena i suradnika (2004). Kako bismo prilagodili intervenciju znanjima koja učenici imaju i načinima na koje su bili poučavani o proporcionalnim i neproporcionalnim odnosima, proučili smo kako su proporcionalni odnos i neproporcionalni odnosi obrađeni u hrvatskim školskim udžbenicima. Budući da su sudionici istraživanja bili učenici drugih i trećih razreda srednje škole, uzeli smo u obzir udžbenike i iz osnovne i srednje škole koje su ti učenici prolazili tijekom svojeg školovanja.

1.2.2. Proporcionalnost i neproporcionalnost u hrvatskom kurikulumu i udžbenicima

Prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2011) i Nastavnom planu i programu za osnovnu školu (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2006), proporcionalnost se prvi put spominje među ishodima za peti i šesti razred osnovne škole. Odobreni udžbenici od strane Ministarstva znanosti i obrazovanja za ta dva razreda (npr. Draženović-Žitko, Krnić, Marić i Šikić, 2014; Goleš, Krnić, Lobor i Šikić, 2014) obrađuju sljedeće cjeline: prirodni, cijeli i racionalni brojevi, razlomci i decimalni brojevi, linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom, ravnina, dužina i (polu)pravac, pravilni i nepravilni četverokuti, kut i trokut, kružnica i krug. U udžbenicima za peti i šesti razred pojam „proporcija“ se ne koristi i ne nalaze se prikazi proporcionalnih odnosa. Pojam „linearnost“ spominje se prvi put u udžbeniku za šesti razred osnovne škole, i to u cjelini o linearnim jednadžbama s jednom nepoznanicom. Pritom su navedeni primjeri rješavanja jednadžbi (npr. $3(x + 2) = -4(x + 1)$) i problemskih zadataka koji se mogu riješiti pomoću linearnih jednadžbi. Primjeri problemskih zadataka su sljedeći:

1. Za tri dana prodano je 830 kg jabuka. Drugog je dana prodano 30 kg jabuka manje nego prvog dana, a trećeg dana tri puta više nego drugoga. Koliko je kilograma jabuka prodano prvog dana? (Draženović-Žitko i sur., 2014; udžbenik i zbirka zadataka za drugo polugodište, str. 96)
2. a) Opseg bazena za muški vaterpolo iznosi 100 m. Duljina je bazena 10 m veća od njegove širine. Odredi duljinu i širinu tog bazena.

b) Opseg bazena za ženski vaterpolo iznosi 84 m. Duljina je bazena 8 m veća od njegove širine. Odredi duljinu i širinu tog bazena. Za koliko je površina bazena za muški vaterpolo veća od površine bazena za ženski vaterpolo? (Draženović-Žitko i sur., 2014; udžbenik i zbirka zadataka za drugo polugodište, str. 98)

Proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost tematska su cjelina u sedmom razredu osnovne škole (Golac-Jakopović, Krnić, Šikić i Vuković, 2014). Učenici se susreću s pojmom proporcije, koji je definiran kao jednakost dvaju omjera. Proporcionalne ili razmjerne veličine opisane su kao veličine kod kojih vrijedi da se povećanjem jedne veličine za koeficijent k (koeficijent proporcionalnosti), druga veličina poveća za isti taj koeficijent k. Obrnuto proporcionalne veličine definiraju se kao veličine koje se povećavaju (ili smanjuju) onoliko puta koliko se druga veličina smanji (ili poveća). Proporcionalnost je grafički prikazana pravcem koji prolazi kroz ishodište. Primjer zadatka o proporcionalnim odnosima iz udžbenika Golac-Jakopović i suradnika (2014; udžbenik i zbirka zadataka za prvo polugodište, str. 40) je sljedeći: „Bor visine 12 m ima sjenu duljine 16 m. Koliku sjenu istodobno ima bor visok 18 m?“.

Neproporcionalni odnosi ne spominju se pod ovim nazivom u udžbenicima za osnovnu školu, ali se neproporcionalni kvadratni odnosi obrađuju u okviru tema o površini kruga (sedmi razred; Golac-Jakopović i sur., 2014) te kvadriranju, kvadratnoj funkciji i površini mnogokuta (osmi razred; Nemeth, Stajčić i Šikić, 2014).

Problemski zadaci vezani uz proporcionalnost i neproporcionalnost mogu se susresti ponovno u udžbeniku za prvi razred gimnazijskog programa (Dakić i Elezović, 2014a). Primjer zadatka u kojem se uspoređuju proporcionalni i neproporcionalni odnosi je sljedeći: „Opseg pravokutnika je 52 cm, a razlika duljina njegovih stranica iznosi 6 cm. Kolika je površina pravokutnika?“ (Dakić i Elezović, 2014a; udžbenik i zbirka zadataka za drugo polugodište, str. 54).

Kao što se može uočiti u prikazanim primjerima, u problemskim zadacima u školskim udžbenicima opseg i površina izravno su spomenuti. U istraživanjima iluzije proporcionalnosti opseg i površina se ne spominju izravno, odnosno, zadaci koji se koriste u istraživanjima iluzije proporcionalnosti razlikuju se od zadataka s kojima se učenici obično susreću, što može smanjiti razumijevanje zadataka u istraživanjima. Međutim, prethodno spomenuto istraživanje Van Doorena, De Bocka, De Bollea i suradnika (2003) pokazuje da su učenici podložni iluziji proporcionalnosti i kada su opseg i površina izravno spomenuti u zadatku. Možemo stoga pretpostaviti da (ne)izravno spominjanje pojmova „opseg“ i „površina“ ne doprinosi značajno podložnosti učenika iluziji proporcionalnosti.

Nadalje, analizom školskih udžbenika uočeno je da proporcionalni odnos i neproporcionalni odnosi (npr. neproporcionalni kvadratni i kubni odnosi) nisu uspoređivani u udžbenicima. Naime, proporcionalnost se obrađuje u sedmom razredu osnovne škole, dok se neproporcionalni odnosi obrađuju kroz veći broj tematskih cjelina tijekom viših razreda osnovne škole, kao i u srednjoj školi (npr. potencije, računanje površine geometrijskih likova i volumena geometrijskih tijela). Pojam „neproporcionalnost“ ne spominje se ni u jednoj od tih cjelina i ne dovodi se u vezu s proporcionalnim odnosom. Istraživanja o korištenju usporedbe (npr. Rittle-Johnson i Star, 2007, 2009) su pokazala da su upravo usporedba različitih postupaka, definiranje pojmova i njihova usporedba iznimno važni za poboljšanje matematičkih kompetencija. Moguće je da izostanak poučavanja razlika između proporcionalnog i neproporcionalnih odnosa te definiranja neproporcionalnosti, kao i naglašavanje uvježbavanja postupaka bez usvajanja konceptualnog znanja, potiču podložnost učenika iluziji proporcionalnosti.

1.2.3. Determinante iluzije proporcionalnosti

Osim prethodno navedenih nedostataka u matematičkim kompetencijama, u literaturi se navodi još nekoliko čimbenika koji dovode do iluzije proporcionalnosti, poput nepoznavanja matematičkih heuristika (tj. najlakših i najprikladnijih postupaka koji mogu olakšati rješavanje zadataka) i neadaptivnih uvjerenja o rješavanju matematičkih problemskih zadataka (De Bock, Van Dooren i sur., 2002). Nadalje, smatra se da je proporcionalnost intuitivna i ljudima lakše razumljiva od neproporcionalnosti, a istraživanja provedena na djeci to i potvrđuju. Tako je istraživanje koje su proveli Ebersbach i Resing (2008) pokazalo da petogodišnjaci mogu razlikovati proporcionalne i neproporcionalne odnose, ali da i točnije procjenjuju rješenja u zadacima u kojima se odnosi mijenjaju prema proporcionalnom modelu nego rješenja u zadacima u kojima se odnosi mijenjaju prema neproporcionalnom modelu. Stoga je zaključeno da se razumijevanje proporcionalnosti razvija prije razumijevanja neproporcionalnosti te se razumijevanje neproporcionalnosti poboljšava polaskom djece u osnovnu školu. Pritom je razumijevanje kod starije djece, kao i kod mlađe, bolje na implicitnoj nego na eksplicitnoj razini.

Iako je proporcionalnost intuitivnija od neproporcionalnosti, prethodno navedeno istraživanje Ebersbach i Resing (2008), kao i druga istraživanja provedena na predškolskoj djeci pokazuju da djeca prije polaska u školu intuitivno razumiju neproporcionalnost i da ju razlikuju od proporcionalnosti (npr. Ebersbach, Van Dooren, Goudriaan i Verschaffel, 2010; Ebersbach

i Wilkening, 2007). Primjerice, u istraživanju na petogodišnjacima pred djecu je postavljena manja cijev koja je sadržavala pikule i cijev je bila omotana gumicom do visine na kojoj se nalaze pikule (Ebersbach i sur., 2010). Djeci je bilo rečeno da se u prvoj cijevi nalaze pikule koje reprezentiraju zečeve koji su živjeli na livadi jedne godine. Zatim je bilo rečeno da se u drugoj cijevi nalaze pikule koje reprezentiraju zečeve koji su živjeli na livadi sljedeće godine, i dalje su slijedila objašnjenja za treću i četvrtu cijev. U jednoj skupini djece porast broja pikula bio je proporcionalan, dok je u drugoj skupini bio neproporcionalan. U drugom je eksperimentu neproporcionalni porast bio eksponencijalan, a djeci je bilo rečeno da pikule reprezentiraju trešnje koje bere jedan muškarac te ih stavlja u posude. U trećem eksperimentu neproporcionalni porast bio je polinoman, a pikule su reprezentirale slatkiše. Točnije, djeci je u uputi bilo rečeno da magični stroj proizvodi slatkiše i da djeca koja dolaze do tog stroja žele svaki dan sve više slatkiša pa ih stroj mora sve više i proizvoditi. Zadatak svakog djeteta bio je na petoj, šestoj i sedmoj cijevi označiti povlačenjem gumice broj pikula koji se očekuje s obzirom na dosadašnji porast broja pikula. Pokazalo se da djeca mogu razlikovati proporcionalne od neproporcionalnih odnosa, iako je neproporcionalni porast u većoj mjeri bio podcjenjivan, a proporcionalni porast precjenjivan.

Međutim, tijekom obrazovanja proporcionalnost se poučava ranije i u većoj mjeri od neproporcionalnosti (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2006, 2011). Budući da se model proporcionalnosti učestalo koristi, ona se sve više učvršćuje te se sve brže i lakše aktivira tijekom matematičkog rezoniranja, što rezultira shvaćanjem raznih brojčanog odnosa kao da su proporcionalni (Bock i sur., 2007). Upravo je brza i laka aktivacija modela proporcionalnosti dovela do pretpostavke da je proporcionalno rezoniranje automatsko i intuitivno. Automatski procesi proučavani su u okviru brojnih teorija koje su objedinjene u tzv. teorije dualnih procesa (Evans i Stanovich, 2013). Proučavanje procesiranja informacija kod iluzije proporcionalnosti moglo bi pomoći u razumijevanju te pojave i načina na koji se ona može učinkovito smanjiti, kako bi učenici bili uspješniji u razumijevanju i rješavanju zadataka iz različitih matematičkih područja koja se temelje na (ne)proporcionalnosti.

1.3. Teorije dualnih procesa/sustava

Brojni su mislioci, poput Platona i Descartesa, tijekom proteklih dvije tisuće godina smatrali da se čovjek i njegova duša mogu podijeliti na nekoliko dijelova, od kojih su dva osnovna: racionalni dio koji je bliži Bogu, i urođeni, iracionalni, životinjski dio (Frankish i Evans, 2009). Ideja o podjeli uma na racionalni i iracionalni dio uočava se i u znanstveno utemeljenim teorijama dualnih procesa, za koje se smatra da predstavljaju jednu od najznačajnijih ideja i dostignuća u povijesti psihologije (Sherman, Gawronski i Trope, 2014). Ove teorije pojavljuju se od početka kognitivne revolucije 1960-ih godina, i to ponajprije u kognitivnoj i socijalnoj psihologiji (Evans, 2008). Tijekom proteklog desetljeća lokalizirane teorije dualnih procesa integrirane su u općenitije teorije mentalne arhitekture nazvane teorije dualnih sustava, prema kojima čovjek, metaforički rečeno, ima dva „uma“ koji dovode do izuzetnih dostignuća čovječanstva, kao i do naizgled neobjašnjivih ljudskih pogrešaka (Evans, 2008; Evans i Stanovich, 2013; Stanovich, 1999). Svrha integriranja teorija dualnih procesa bila je traženje sličnosti među teorijama te uvođenje sustavnosti u proučavanje dualnih procesa (Stanovich i Toplak, 2012). Tako je Stanovich (1999) izdvojio obilježja koja su pripisivana dvjema vrstama kognitivnih procesa, i jednu, sadržajno koherentnu kategoriju obilježja, nazvao je Sustav 1, a drugu Sustav 2.

1.3.1. Obilježja tipova/sustava procesiranja informacija

Sustav 1 autonoman je (tj. ne ovisi o naredbama viših kognitivnih procesa prilikom procesiranja informacija), nije opterećujući za resurse radnog pamćenja pa može obrađivati informacije paralelno, automatski se aktivira prilikom dobivanja zahtjeva za kognitivnim procesiranjem, te je brz, nesvjestan, nefleksibilan (tj. na njega se ne može djelovati verbalnim uputama), kontekstualiziran je i evolucijski stariji.

Ovaj je sustav heterogen i sastoji se od različitih podsustava, a takvu raznolikost Stanovich (2004) naziva autonomnim skupom sustava (engl. *The autonomous set of systems*; TASS). Tako Sustav 1 obuhvaća i urođene i naučene radnje koje su usvojene do automatizma (Evans, 2009; Evans i Stanovich, 2013). Nadalje, iako se teoretičari još uvijek ne slažu oko postojanja modula i njihove organizacije, zagovornici Fodorovog modularnog pristupa (Fodor, 1983) navode obilježja modula koja odgovaraju obilježjima Sustava 1 pa se u TASS ubrajaju i moduli. Tako se smatra da se moduli nalaze na nižoj razini procesiranja te su specijalizirani za obradu određenih informacija, lokalizirani su u točno određena područja u mozgu, brzo

procesiraju informacije, aktiviraju se automatski prilikom susreta pojedinca s nekim podražajem i nisu opterećujući za radno pamćenje. Procesi koji se odvijaju u modulima nisu dostupni svijesti, već je svijesti dostupan samo konačan produkt tog procesiranja. Uz to, sadržaji dostupni svijesti ne mogu promijeniti modularno procesiranje, što se može demonstrirati na primjeru Műller-Lyerove iluzije (Frankenhuis i Ploeger, 2007; Pylyshyn, 1999). Točnije, ljudi koji su svjesni da su dvije linije u ovoj iluziji jednake duljine i dalje percipiraju različite duljine tih linija. Primjeri modula su: modul za implicitno učenje, epizodičko, semantičko i proceduralno pamćenje, jezični modul i perceptivni moduli.

Sustav 1 često koristi heuristike, koji se u okviru kognitivne psihologije definiraju na različite načine. S jedne strane, Gigerenzer i suradnici (Gigerenzer, 2008; Gigerenzer i Gaissmaier, 2011; Kruglanski i Gigerenzer, 2011; Neth i Gigerenzer, 2015), unutar okvira „brzo i štedljivo“ (engl. *fast and frugal*), smatraju da su heuristici adaptivni alati koji omogućuju donošenje učinkovitih odluka i rješenja u različitim situacijama, od probabilističkog rezoniranja do socijalnih interakcija. Prema navedenim autorima, heuristici mogu uključivati i složenije algoritme koje koriste stručnjaci za, primjerice, donošenje financijskih, pravnih ili liječničkih odluka, ali uvijek predstavljaju najjednostavniju opciju od različitih opcija koje postoje. Nadalje, heuristici nisu rezultat samo ograničenja ljudskog uma, već i vrste zadatka koji je stavljen pred pojedinca. Točnije, heuristici se često koriste u nejasnim i nejednoznačnim situacijama, kao i u situacijama u kojima je teško pronaći optimalnu strategiju rješavanja problema ili donošenja odluke, te kada je važno da se rješenje ili odluka donesu brzo. Iako heuristici uključuju zanemarivanje dijela informacija, mogu rezultirati točnijim ishodom obrade informacija od uzimanja i ponderiranja svih informacija. Navedeni autori stoga sugeriraju da su heuristici učinkoviti kada su zadovoljeni uvjeti ekološke racionalnosti, odnosno kada postoji visok stupanj usklađenosti između okoline i heuristika te kada osoba posjeduje potrebne kapacitete za primjenu heuristika (Neth i Gigerenzer, 2015). Dakle, pogled navedenih autora na heuristike većim je dijelom pozitivan i istraživači bi prema njima trebali pronaći situacije u kojima su heuristici djelotvorni.

S druge strane, najprihvaćenije shvaćanje heuristika predložili su Tversky i Kahneman (1974, 1983), koji heuristike opisuju kao strategije koje pružaju prečice do rješenja problema ili donošenja odluke, a razlikuju se od normativnih procesa rezoniranja jer mogu dovesti do pristranosti u obradi informacija. Za razliku od Gigerenzera (2008), ovi autori u većoj su se mjeri usmjerili na pristranosti u procesiranju informacija i traženju situacija u kojima dolazi do tih pristranosti. Prema njima, heuristici su dio prirodne procjene situacije. Točnije, smatra se da heuristici nisu nužno rezultat kognitivne škrtosti i namjerne odluke osobe da ne uloži više

pažnje i kognitivnog napora u procesiranje informacija, već su rezultat automatiziranih procesa koji se teško inhibiraju (Gilovich i Griffin, 2002). Osoba se obično oslanja na heuristike kada može u nekoj situaciji upotrijebiti jednostavne računske operacije, perceptivna obilježja informacija ili neke druge jednostavnije reakcije, poput emocija, umjesto prikladnijih složenijih reakcija kako bi donijela odluku ili došla do rješenja zadatka (Kahneman i Frederick, 2002). Ovaj proces zamjene složenijih postupaka jednostavnijima naziva se zamjena obilježja. Prema ovom shvaćanju, heuristici se automatski aktiviraju prilikom susreta s nekim zadatkom i prisutni su u zadatku čak i kada je radno pamćenje opterećeno drugim informacijama. Upravo se zbog ovih obilježja navodi da se Sustav 1 oslanja na heuristike.

Sustav 2 predstavlja refleksivnu obradu informacija koja zahtijeva ulaganje značajnih resursa radnog pamćenja, što posljedično rezultira procesiranjem koje je sporo, serijalno, svjesno i može se kontrolirati pa je time i fleksibilno. Osim toga, na Sustav 2 može se djelovati verbalnim uputama, dekontekstualiziran je i evolucijski mlađi (Stanovich, 1999). Ovaj sustav omogućuje procesiranje apstraktnih informacija i donošenje zaključaka ili logičkih odluka.

Procesi u okviru Sustava 2 također mogu biti raznoliki, a njihove razlike proizlaze iz specifičnosti obrada informacija u koje su uključeni (npr. obrada informacija u okviru deduktivnog rezoniranja ili čitanja u koje je uključena pažnja) (Evans, 2009). U jednom trenutku može biti aktivan samo jedan oblik procesiranja unutar Sustava 2 jer ono zahtijeva resurse radnog pamćenja, koje je ograničenog kapaciteta.

Teoriji dualnih sustava upućene su različite kritike, a jedna od najčešćih odnosi se na dihotomizaciju „uma“ na dva dijela. Naime, prema kritičarima dualnog pristupa, obrada informacija odvija se u okviru jednog sustava koji posjeduje različita obilježja. Ta se obilježja aktiviraju ovisno o situaciji i mogu biti u različitim interakcijama (Keren i Schul, 2009; Kruglanski i Gigerenzer, 2011; Osman, 2004). Također, obilježja koja se definiraju kao dihotomna u okviru dualnih teorija (npr. svjesno nasuprot nesvjesnom procesiranju informacija), prema ovim kritičarima, nisu nužno dihotomna, već kontinuirana. Primjerice, neka radnja, poput učenja vožnje automobila, koja se početno izvodi s punom svijesti te zahtijeva koncentraciju i ulaganje truda u procesiranje informacija, učenjem i učestalim ponavljanjem postane automatizirana. Stoga se tijekom učenja vožnje automobila razina kontroliranosti izvođenja ove radnje pomiče na jednoj dimenziji od pune kontrole do automatizma.

Druga kritika proizlazi iz samih termina Sustav 1 i Sustav 2. Točnije, pojam „sustav“ implicira da se ova dva sustava mogu lokalizirati u točno određena mozgovna područja (Keren i Schul, 2009). Međutim, kao što je spomenuto, uočeno je da Sustav 1 uključuje heterogene

procese, koje ne bi bilo moguće lokalizirati u samo jedno mozgovno područje, a i Sustav 2 uključuje aktivaciju različitih mozgovnih područja. Tako Sustav 1 obuhvaća, među ostalim strukturama, bazalne ganglije, amigdalu, lateralni temporalni korteks (Carruthers, 2009; Lieberman, Jarcho i Satpute, 2004), a Sustav 2 orbitalni i medijalni prefrontalni korteks te medijalni temporalni korteks (De Martino, Kumaran, Seymour i Dolan, 2006; Lieberman i sur., 2004). Zagovornici dualnog pristupa ističu da povezivanje sustava s mozgovnim područjima nadilazi postavke teorije dualnih sustava u okviru koje je Stanovich (1999) samo na deskriptivnoj razini sastavio listu obilježja ovih dvaju sustava, bez nastojanja da poveže ta obilježja s točno određenim mozgovnim područjem. Međutim, kako ne bi dolazilo do pogrešnih shvaćanja postavki dualnih teorija, u novije se vrijeme ne istražuju „sustavi“, već procesi koji se odvijaju za vrijeme obrade informacija. Točnije, u okviru dualnog pristupa danas se stavlja naglasak na načine procesiranja informacija koji dijele obilježja navedena pod Sustavom 1, odnosno Sustavom 2. Time se ističe procesiranje informacija, a ne mentalna arhitektura, što je bio slučaj kod teorija dualnih sustava (Evans i Stanovich, 2013). Stoga je danas zastupljeniji naziv teorije dualnih procesa (koji će se koristiti u nastavku teksta), a ne teorije dualnih sustava. Također, umjesto naziva Sustav 1 koristi se naziv procesiranje Tipa 1, a umjesto naziva Sustav 2 naziv procesiranje Tipa 2.

Konačno, kritičari teorija dualnih procesa navode da je neopravdano ispitivati obilježja dva tipa procesiranja informacija neovisno jedne o drugima (npr. brzu aktivaciju procesiranja Tipa 1 i fleksibilnost procesiranja Tipa 2), što je obično slučaj kod istraživača u ovom području, već se sva obilježja procesiranja informacija moraju ispitivati zajedno (Keren i Schul, 2009; Kruglanski i Gigerenzer, 2011). Ilustrativno rečeno, u istraživačkom nacrtu s tri varijable, koje imaju po dvije razine (2x2x2), postoji osam situacija čiji se rezultati uspoređuju. U teorijama dualnih procesa umjesto svih osam situacija provjeravaju se samo dvije, jedna koja odgovara obilježjima procesiranja Tipa 1 i druga koja odgovara obilježjima procesiranja Tipa 2, dok se sve međusobne kombinacije ne provjeravaju. Prema kritičarima, svjesno ponašanje može biti automatsko, a automatsko ponašanje može biti fleksibilno i ono se može mijenjati ovisno o ciljevima (Keren i Schul, 2009).

Međutim, prema Evansu i Stanovichu (2013), kriterij prema kojem je za definiranje neke obrade informacija kao procesiranje Tipa 1 ili Tipa 2 nužno da ta obrada posjeduje sva navedena obilježja procesiranja Tipa 1 i Tipa 2, bio bi vrlo strog kriterij, te se takvi uvjeti ne primjenjuju ni za jedan konstrukt ili proces. Stoga zagovornici teorija dualnih procesa ističu da sva obilježja ne predstavljaju ključna obilježja ovih dvaju tipova procesiranja informacija, već postoje obilježja koja se nazivaju definirajućim obilježjima procesiranja Tipa 1 i Tipa 2. Bez

prisutnosti tih obilježja ne može se govoriti o ovim vrstama procesiranja informacija (Evans i Stanovich, 2013; Stanovich i Toplak, 2012). Osnovno je obilježje procesiranja Tipa 1 da nije opterećujuće za radno pamćenje i da je autonomno (Evans i Stanovich, 2013). Ova obilježja povezana su s automatskom i brzom aktivacijom procesiranja Tipa 1, paralelnom obradom informacija, kao i s obilježjem da procesiranje nije svjesno dostupno, već je osoba svjesna samo ishoda tog procesiranja. Suprotno tome, osnovno obilježje svih procesiranja Tipa 2 je da uključuju značajne resurse radnog pamćenja te da omogućuju kognitivno razdvajanje (engl. *cognitive decoupling*) (Stanovich i Toplak, 2012). Mehanizmi kognitivnog razdvajanja omogućuju inhibiciju heuristika i mentalne simulacije te se nalaze u osnovi kognitivnih simulacija i hipotetskog mišljenja (tj. fluidne inteligencije) (Stanovich, 2009). Naime, primarna reprezentacija predstavlja izravno mapiranje svijeta, dok je sekundarna reprezentacija kopija primarne reprezentacije, ali je odvojena od „svijeta“ kako bi se njome moglo manipulirati, odnosno, kako bi bila dio mentalnih simulacija. Razdvajanje sekundarnih od primarnih reprezentacija (tj. kognitivno razdvajanje) nužno je kako ne bi došlo do miješanja primarnih reprezentacija i mentalnih simulacija.

1.3.2. Istraživanja obilježja dvaju tipova procesiranja informacija

U istraživanjima obilježja dvaju tipova procesiranja informacija korišteni su tzv. nekongruentni zadaci (tj. heuristik je u konfliktu s analitičkim odgovorom i nije normativno točan), među kojima su najčešće korišteni zadaci probabilističkog rezoniranja i zadaci donošenja prosudbi ili odluka (npr. zadatak osnovne razine, engl. *base-rate*; zanemarivanje nazivnika, engl. *denominator neglect*; uokviravanje, engl. *framing*; pogreška konjunkcije, engl. *conjunction fallacy*) (Kahneman i Frederick, 2002), Wasonov zadatak odabira, kategorički silogizmi (Evans, 2006) te Test kognitivne refleksivnosti (Frederick, 2005).

U Wasonovom zadatku odabira uputa sudionicima glasi: „Imate pred sobom četiri karte i na svakoj je napisano na jednoj strani slovo, a na drugoj strani broj. Vaš zadatak je provjeriti pravilo: Ako je na jednoj strani A, onda je na drugoj strani 4. Koju kartu/koje karte trebate okrenuti kako biste provjerili ovo pravilo?“ (De Neys, 2006a; Evans, 1996, 2006). Karte koje su pred sudionicima imaju napisane oznake „A“, „T“, „4“ i „7“. Umjesto ovih oznaka, mogu se koristiti i druge, apstraktne oznake ili tvrdnje. Logički točan odgovor, karte „A“ i „7“, bira 10-20% sudionika, dok većina sudionika bira karte „A“ i „4“, što je pogrešan odgovor koji označava odgovaranje na temelju heuristika utemeljenog na leksičkom sadržaju. Drugim riječima, radi se o pristranosti utemeljenoj na podudaranju (engl. *matching bias*). Naime, u

samom pravilu koje je prezentirano sudionicima navode se „A“ i „4“ te sudionici najčešće okreću upravo te karte. Pritom je karta koja na prednjoj strani ima „A“ relevantna za provjeru pravila jer na drugoj strani ne smije biti nijedna druga oznaka osim „4“, kako bi pravilo bilo potvrđeno. Karta koja na prednjoj strani ima „4“ nije relevantna za provjeru pravila jer se u samom pravilu ne navodi što mora biti napisano na poleđini karte koja ima oznaku „4“ na prednjoj strani. S druge strane, karta koja ima na prednjoj strani „7“ relevantna je za provjeru pravila jer na poleđini ne smije pisati „A“, kako bi pravilo bilo potvrđeno. Karta koja na prednjoj strani ima „T“ uopće nije relevantna jer se u pravilu ne navodi što mora/što ne smije biti na poleđini karte koja na jednoj strani ima slovo „T“.

Kategorički silogizam sastoji se od dvije premise i jedne konkluzije, odnosno zaključka koji slijedi iz tih premisa (Evans, 2006). Konkluzija može biti logički valjana ili nevaljana. Osim toga, istraživači variraju i sukladnost ili nesukladnost konkluzije vjerovanjima, odnosno uvjerenjima pojedinca utemeljenima na vlastitom iskustvu. Time su moguće četiri vrste zaključaka: logički valjan – sukladan vjerovanjima, logički valjan – nesukladan vjerovanjima, logički nevaljan – sukladan vjerovanjima i logički nevaljan – nesukladan vjerovanjima. Pokazuje se da sudionici u najvećoj mjeri navode da su logički valjani zaključci oni koji su normativno logički valjani i oni zaključci koji su sukladni vjerovanjima, pa čak i kada nisu logički valjani. Primjer logički nevaljanog zaključka sukladnog vjerovanjima je sljedeći:

Premisa 1: Nijedan zdrav čovjek nije nesretan.

Premisa 2: Neki astronauti su nesretni.

Konkluzija: Dakle, neki zdravi ljudi nisu astronauti.

Pretpostavilo se da odgovaranje na temelju sukladnosti zaključka vjerovanjima predstavlja pristrano odgovaranje utemeljeno na heuristicima, koje je nazvano pristranost vjerovanja (engl. *belief bias effect*).

U istraživanjima je često korišten i Test kognitivne refleksivnosti (Frederick, 2005), koji se sastoji od tri zadatka:

1. Palica i loptica zajedno koštaju 110 kuna. Palica košta 100 kuna više od loptice. Koliko košta loptica?
2. Ako je potrebno 5 minuta da bi 5 strojeva napravilo 5 naprava, koliko će vremena biti potrebno da 100 strojeva izradi 100 naprava?
3. U jezeru se nalazi mnoštvo lopoča. Svakog dana površina lopoča na jezeru se udvostručuje. Ako je potrebno 48 dana da bi lopoči prekrili čitavo jezero, koliko je vremena potrebno lopočima da prekriju polovicu jezera?

Rezultati primjene ovog testa pokazuju da sudionici najčešće odgovaraju pogrešno na ove zadatke, iako zadaci ne zahtijevaju primjenu složenijih razina matematičkog znanja (Bago i De Neys, 2009; Frederick, 2005; Travers, Rolison i Feeney, 2018). Naime, najčešći odgovori su 10 kuna (umjesto točnog odgovora: 5 kuna), 100 minuta (umjesto točnog odgovora: 5 minuta) i 24 dana (umjesto točnog odgovora: 47 dana).

Provedena istraživanja temeljila su se na dvije paradigme. Prva se paradigma temelji na kronometrijskim istraživanjima u kojima se kroz mjerenje vremena reakcije provjeravalo hoće li brzo odgovaranje biti u većoj mjeri rezultat djelovanja procesiranja Tipa 1, a sporije odgovaranje rezultat djelovanja procesiranja Tipa 2. Rezultati pokazuju da sudionici koji točno odgovaraju na Wasonov zadatak odabira sporije daju svoj odgovor u odnosu na sudionike koji odgovaraju pogrešno (na temelju heuristika) (De Neys, 2006a). Nadalje, postavljanjem vremenskog ograničenja za davanje odgovora, broj pogrešnih odgovora se povećava. Pritom ne raste broj bilo kojih pogrešnih odgovora, već se povećava broj pogrešnih odabira koji odražavaju pristranost utemeljenu na podudaranju (Roberts i Newton, 2002). Podjednaki rezultati pokazuju se i kod kategoričkih silogizama. Točnije, u situaciji bez vremenskog ograničenja broj točnih odgovora raste, a postavljanjem vremenskog ograničenja povećava se učestalost odgovaranja na temelju sukladnosti konkluzije vjerovanjima (Evans i Curtis-Holmes, 2005). Time se pokazalo da odgovori koji sudionicima prvi padnu na pamet i koji su generirani brzo predstavljaju odgovore koji su rezultat procesiranja Tipa 1. Kada osoba ima dovoljno vremena i motivacije za obradu informacija, veća je vjerojatnost da će procesiranje Tipa 2 korigirati automatski odgovor procesiranja Tipa 1.

Druga paradigma temelji se na manipulaciji sekundarnim zadatkom i njome je ispitivano zahtijeva li procesiranje Tipa 2, za razliku od procesiranja Tipa 1, resurse radnog pamćenja. Naime, zadavanje sekundarnog zadatka opterećuje radno pamćenje pa bi se broj točnih odgovora trebao smanjiti jer bi sekundarni zadatak trebao djelovati na procesiranje Tipa 2. Suprotno tome, broj pristranih odgovora utemeljenih na heuristicima trebao bi porasti jer sekundarni zadatak ne bi trebao djelovati na procesiranje Tipa 1 koje ne opterećuje radno pamćenje. U istraživanjima su potvrđene navedene pretpostavke. Točnije, kada sudionici dobivaju sekundarni zadatak, pristranost utemeljena na podudaranju u Wasonom zadatku odabira povećava se, dok se točnost odgovaranja smanjuje u odnosu na kontrolnu grupu koja nema sekundarni zadatak ili ima sekundarni zadatak koji predstavlja minimalno opterećenje za izvršne procese radnog pamćenja (De Neys, 2006a, 2006b).

Kao što je spomenuto, prethodno prikazana istraživanja polazila su od pretpostavke da postoji nejednakost u brzini procesiranja između dvaju tipova procesiranja informacija (tj. da je procesiranje Tipa 1 sporo, a procesiranje Tipa 2 brzo), kao i da je za odgovore sukladne logici odgovorno procesiranje Tipa 2. Novija istraživanja pokazala su da ove pretpostavke nisu nužno točne. Naime, smatra se pogrešnim izjednačavati procesiranje Tipa 2 s normativnom točnošću odgovora i procesiranje Tipa 1 s pristranostima u rezoniranju (Bago i De Neys, 2017; Elqayam i Evans, 2011; Evans, 2019; Thompson, Pennycook, Trippas i Evans, 2018). Naime, procesiranje Tipa 2 može uključivati racionalizaciju početnog odgovora i tzv. serijalnu asocijativnu kogniciju (engl. *serial associative cognition*) koja nije utemeljena na hipotetskom i logičnom rezoniranju te ne uključuje procese razdvajanja (Evans, 2019; Stanovich, 2009). Primjerice, istraživanja pokazuju da sudionici duže gledaju u karte koje u konačnici odaberu ili drže miš na njima (što je, prema uputama, pokazivalo da ih razmatraju kao svoj konačan odgovor), pri čemu su te karte najčešće odražavale pristranost utemeljenu na podudaranju (Ball, Lucas, Miles i Gale, 2003; Evans, 1996). Ovi rezultati ujedno pokazuju da ljudi prilikom davanja pogrešnih odgovora nisu nužno kognitivni škrci, već „troše“ vrijeme prilikom rezoniranja na neadekvatne načine (npr. zbog neznanja) (Evans, 2019, Stanovich, 2018).

Osim toga, ne generira samo procesiranje Tipa 2 odgovor sukladan logičkim pravilima, već i procesiranje Tipa 1 može generirati normativno točne odgovore utemeljene na logici, kod jednostavnih zadataka (Bago i De Neys, 2017), kao i kod složenijih zadataka, poput onih iz Frederickovog (2005) Testa kognitivne refleksivnosti (Bago i De Neys, 2019). Primjerice, od oko 30% do 60% sudionika u nekongruentnim zadacima generira točan početni odgovor, i to uz vremenski pritisak i sekundarni zadatak, te taj odgovor ne mijenjaju prilikom drugog pokušaja rješavanja zadatka. Stoga je De Neys (2012) uveo model intuitivne logike, prema kojem procesiranje Tipa 1 paralelno generira odgovor utemeljen na heuristicima i odgovor utemeljen na logičkim pravilima pa u nekim situacijama prevlada jedan, a u drugim situacijama drugi odgovor. Pritom se smatra da se intuitivna logika temelji na znanju o osnovnim logičkim i probabilističkim principima (De Neys i Pennycook, 2019). Vjerojatnost da će automatski odgovor procesiranja Tipa 1 biti logički točan veća je kod ljudi koji posjeduju potreban *mindware* (tj. znanje u određenom području važnom za rezoniranje, npr. znanje o Bayesovom teoremu važno je za probablilističko rezoniranje, kao i općenito numeričko znanje i vještine; Evans, 2019; Stanovich, 2018). Pritom je važno da je *mindware* automatiziran kako bi postao intuitivna logika te da pomoću njega procesiranje Tipa 1 može brzo generirati točan odgovor kojeg procesiranje Tipa 2 ne treba korigirati. Ako *mindware* nije automatiziran, a osoba ga posjeduje, do njega dolazi kroz procesiranje Tipa 2, što u velikoj mjeri ovisi o kognitivnim

kapacitetima osobe (Stanovich, 2018). Tada ne govorimo o intuitivnoj logici, već o namjernom i kontroliranom rezoniranju. Dakle, intuitivna logika stvara se automatizacijom pravila, procedura, zakonitosti ili znanja (*mindwarea*), pa se smatra da su poučavanje i trening rezoniranja ključni za njezino stvaranje (Bago i De Neys, 2019). Međutim, vještine važne za rezoniranje rijetko su dio formalnog obrazovnog procesa (Morsanyi, McCormack i O'Mahony, 2018).

Nadalje, istraživanje koje su proveli Newman, Gibb i Thompson (2017) pokazalo je da prilikom odgovaranja s vremenskim pritiskom na nekongruentne zadatke (silogizmi i zadaci probabilističkog rezoniranja), sudionici mogu uočiti bitna obilježja zadataka koja su važna za logičko rezoniranje (npr. razlike u ekstremnosti omjera u zadacima probabilističkog rezoniranja). Zbog korištenja složenijih zadataka za koje autori pretpostavljaju da zahtijevaju angažman procesiranja Tipa 2, autori rezultate interpretiraju kao posljedicu brzog procesiranja Tipa 2, a ne kao mogućnost da postoje logični odgovori procesiranja Tipa 1. Dakle, s jedne strane Bago i de Neys (2019) brzo i točno rješavanje složenijih zadataka pripisuju intuitivnoj logici i procesiranju Tipa 1, dok s druge strane Newman i suradnici (2017) smatraju da se radi o brzoj aktivaciji procesiranja Tipa 2. Pitanje postojanja intuitivne logike i brzog procesiranja Tipa 2 stoga je još uvijek otvoreno.

Konačno, Thompson i suradnici (2018) su koristili metodologiju sličnu Stroop testu. Naime, sudionici su dobili uputu da moraju procijeniti zaključak ili isključivo koristeći logiku ili isključivo koristeći uvjerljivost zaključaka/odgovora (što odražava pristranosti u rezoniranju). Rezultati istraživanja pokazali su da prilikom odgovaranja s vremenskim ograničenjem osobe viših kognitivnih sposobnosti brzo generiraju odgovore sukladne logici, što je rezultiralo boljim učinkom kada su trebali rezonirati o problemima na temelju logike nego na temelju uvjerljivosti zaključaka/odgovora. Kod osoba nižih kognitivnih sposobnosti uočen je obrnuti obrazac: one su brzo generirale odgovore utemeljene na heuristicima, a ne odgovore utemeljene na logici.

Može se stoga zaključiti da barem u nekim situacijama (npr. uz odgovarajuću uputu, motivaciju) i kod osoba odgovarajućih kognitivnih sposobnosti i *mindwarea* ljudi mogu brzo generirati normativno točne odgovore.

1.3.3. Odnos između dvaju tipova procesiranja informacija

Prema Evansu (2007), tri su moguća odnosa između procesiranja Tipa 1 i Tipa 2 koji su opisani u okviru tri modela: model preventivnog razrješenja konflikta, paralelno-kompetitivni model i standard-intervencija model.

Model nazvan preventivno razrješenje konflikta pretpostavlja da na temelju površnih obilježja podražaja osoba, odmah nakon percipiranja tog podražaja, odlučuje hoće li koristiti procesiranje Tipa 1 ili Tipa 2 (Evans, 2007). Time uopće ne dolazi do konflikta između odgovora ovih dvaju tipova procesiranja informacija, odnosno, konflikt se izbjegava. Primjerice, sudionici bi kod silogizama trebali na temelju površnog obilježja, kao što je uvjerljivost zaključka, odlučiti hoće li slijediti procesiranje Tipa 1 ili Tipa 2 pa u slučaju da je zaključak neuvjerljiv, trebali bi više razmišljati o njemu, odnosno trebali bi aktivirati procesiranje Tipa 2 (Ball, Wade i Quayle, 2006; Thompson, Striemer, Reikoff, Gunter i Campbell, 2003). Međutim, to nije potvrđeno u istraživanjima. Naime, pokazalo se da sudionici ne troše više vremena za razmišljanje o silogizmima s neuvjerljivim zaključkom nego za one s uvjerljivim zaključkom.

Paralelno-kompetitivni model pretpostavlja da i procesiranje Tipa 1 i procesiranje Tipa 2 uvijek generiraju neki odgovor, ali procesiranje Tipa 2 generira odgovor sporije od procesiranja Tipa 1 (Evans, 2007). Drugim riječima, paralelno se generiraju dva odgovora, ali pritom brže procesiranje Tipa 1 mora „čekati“ odgovor sporijeg procesiranja Tipa 2, kako bi se donio konačan odgovor u nekoj situaciji. Kada osoba nema dovoljno vremena za dovršavanje procesiranja Tipa 2, konačan odgovor donosi se samo na temelju procesiranja Tipa 1.

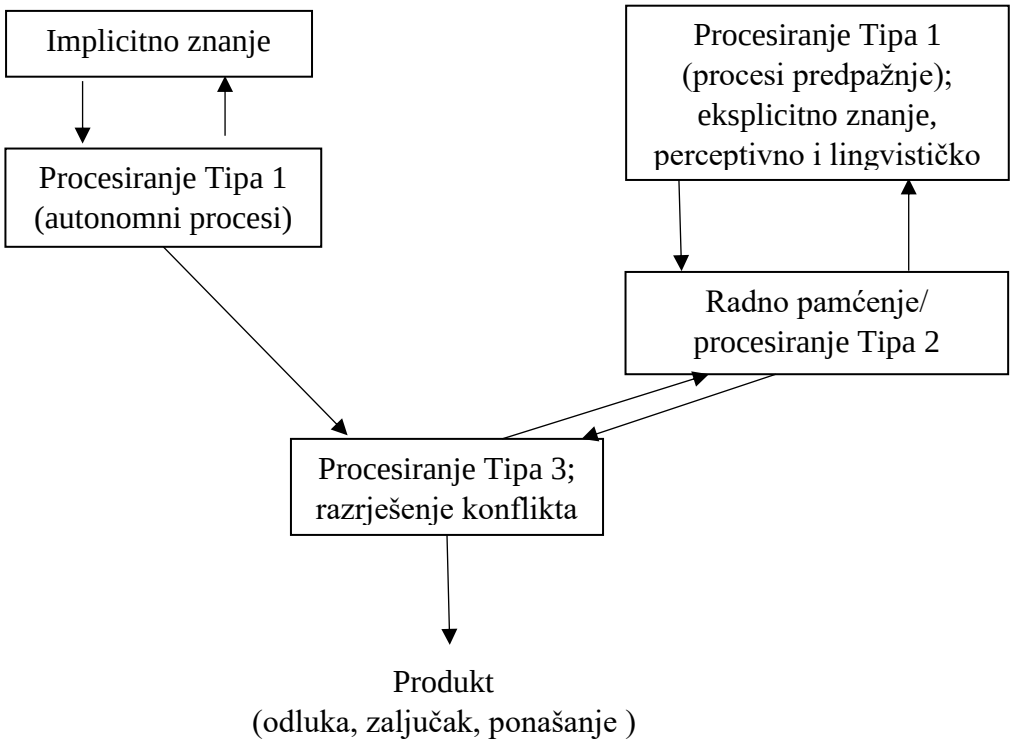
Prema modelu standard-intervencija (engl. *default-interventionist*), procesiranje Tipa 1 i Tipa 2 djeluju sekvencijalno (Evans, 2007; Evans i Stanovich, 2013). Točnije, procesiranje Tipa 1 daje automatski odgovor, a nakon toga može slijediti intervencija procesiranja Tipa 2. *Default* dio naziva ovog modela se odnosi na shvaćanje da je odgovor procesiranja Tipa 1 u pravilu prihvaćen kao konačan odgovor (Evans, 2019). Procesiranje Tipa 2 uvijek se aktivira prilikom obrade informacija, samo se razlikuje dubina i kvaliteta obrade informacija od strane procesiranja Tipa 2 (De Neys i Glumicic, 2008; Evans, 2019). Thompson (2009) dijeli intervencije u koje se uključuje procesiranje Tipa 2 u četiri kategorije. Prva intervencija označava malo ili nimalo daljnje analize odgovora procesiranja Tipa 1. Drugi oblik intervencije odnosi se na racionalizaciju, prilikom koje procesiranje Tipa 2 dodatno analizira odgovor procesiranja Tipa 1, ali ga opravdava, neovisno o njegovoj točnosti. Treća je intervencija najzahtjevnija jer se odnosi na promjenu, odnosno korekciju početnog odgovora, dok četvrta

intervencija predstavlja neuspjeh procesiranja Tipa 2 jer je drugi, alternativni odgovor manje zadovoljavajući od početnog odgovora. Vrsta intervencije ovisi o motivacijskim i situacijskim čimbenicima (npr. vrijeme odstupno za odgovaranje), kao i o kognitivnim čimbenicima (npr. posjedovanje *mindwarea*; kapacitet radnog pamćenja) (Evans, 2019).

Kako bi se provjerilo odražava li paralelno-kompetitivni model ili model standard-intervencija odnos između dvaju tipova procesiranja informacija, korišteni su verbalni protokoli, tzv. tehnika mišljenja na glas. Kod ove tehnike traži se od sudionika da izvještavaju o svojem trenutnom sadržaju svijesti (Evans, 2007). Verbalni protokoli prilikom rješavanja Wasonovog zadatka odabira pokazuju da sudionici doživljavaju konflikt između svojeg početnog odgovora i traženja drugog rješenja te da pokušavaju racionalizirati svoj početni odgovor. Ako se kod sudionika javi konflikt između dvaju odgovora, jednog generiranog automatski i drugog generiranog analitičkim putem, vjerojatno se radi o dva sekvencijalna procesa koji se uvijek aktiviraju prilikom obrade informacija. Pritom će način rješavanja konflikta ovisiti o čimbenicima poput kognitivnih sposobnosti, motivacije ili vremena dostupnog za rješavanje. Dakle, ove rezultate možemo interpretirati u skladu s postavkama modela standard-intervencija. Međutim, treba uzeti u obzir da se kod verbalnih protokola ne može izvještavati o paralelnim procesima i da je moguće da se radi o paralelnom procesiranju informacija o kojem sudionici nisu u mogućnosti izvijestiti. Osim toga, sudionici mogu navesti samo procese koji su dostupni svijesti pa o automatskom i nesvjesnom procesiranju Tipa 1 ni ne mogu izvještavati. Stoga je pitanje odnosa između dva tipa procesiranja informacija još uvijek otvoreno.

Travers i suradnici (2016) koristili su tehniku praćenja računalnim pokazivačem (tj. mišem), kod koje su sudionici trebali držati pokazivač na odgovoru u Testu kognitivne refleksivnosti (Frederick, 2005) koji razmatraju kao svoj konačni odgovor. Pokazalo se da sudionici prije nego odaberu točan odgovor razmatraju odgovor sukladan heuristicima, dok sudionici koji su odabrali netočan odgovor sukladan heuristicima, u pravilu, ne razmatraju točan odgovor. Stoga su navedeni autori zaključili da procesiranje Tipa 1 prethodi procesiranju Tipa 2. Međutim, Bago i De Neys (2019) ističu da je vrijeme koje je proteklo do početnog pokazivanja intuitivnog odgovora bilo predugačko, čime je moguće da Travers i suradnici nisu zahvatili procesiranje Tipa 1.

S ciljem boljeg razumijevanja navedene podijeljenosti shvaćanja odnosa između dvaju tipova procesiranja, definirane su dvije vrste procesiranja Tipa 1, i to s obzirom na izravnost utjecaja na ponašanje (slika 1).



Slika 1. Shematski prikaz dvije vrste procesiranja Tipa 1 te njihovog odnosa s procesiranjem Tipa 2 i konačnim produktom procesiranja informacija (Evans, 2009). Preuzeto iz „How many dual-process theories do we need? One, two, or many?“ od J. S. B. T. Evans i K. Frankish (Ur.), *In two minds: Dual processes and beyond* (str. 49). New York, NY, US: Oxford University Press.

Kao što se može vidjeti na slici 1, procesi Tipa 1 mogu biti ili autonomni ili procesi predpažnje (Evans, 2009). Autonomni procesi Tipa 1 djeluju na ponašanje izravno, bez uključivanje kontrolirane pažnje koja je obuhvaćena procesiranjem Tipa 2. Procesi predpažnje dovode sadržaj radnom pamćenju i svjesnoj pažnji (npr. iz urođenih struktura, implicitnog znanja). Pretpostavlja se da su kod paralelnih procesa aktivni autonomni procesi, a kod sekvencijalnih procesi predpažnje. Nadalje, definirani su procesi Tipa 3 koji služe razrješenju konflikta između procesiranja Tipa 1 i Tipa 2. Naime, procesiranje Tipa 2 ne može biti zaduženo i za logičko rezoniranje i za nadgledanje rezoniranja i odlučivanje o intervencijama, već bi za potonje procese trebao biti zadužen zaseban tip procesiranja informacija, u koji se mogu ubrojiti metakognicija i kognitivni stilovi. Model definiran kao na slici 1 naziva se hibridnim modelom.

1.3.4. Detekcija konflikta

Paralelno-kompetitivni model i standard-intervencija model pretpostavljaju da se prilikom obrade informacija aktiviraju i procesiranje Tipa 1 i Tipa 2 te su njihovi odgovori najčešće kongruentni (De Neys, 2012, 2014; Evans i Stanovich, 2013). Točnije, procesiranje Tipa 1 generira normativno točan odgovor koji procesiranje Tipa 2 ne treba dodatno analizirati. Međutim, ponekad su odgovori nekongruentni, odnosno procesiranje Tipa 1 generira normativno netočan odgovor te tada procesiranje Tipa 2 može intervenirati na neki od prethodno spomenuta četiri načina (Thompson, 2009). U zadacima koji ispituju pristranosti i heuristike, normativno netočan odgovor, generiran od strane procesiranja Tipa 1, u pravilu je sukladan heuristicima te su upravo takvi zadaci prikladni za ispitivanje konflikta između heurističkog i analitičkog sustava procesiranja informacija (De Neys, 2012; Pacini i Epstein, 1999). Uradak u takvim nekongruentnim zadacima (tj. kada je odgovor procesiranja Tipa 1 pristran te sukladan heuristicima i nesukladan analitičkom odgovoru) obično je loš i odgovori ukazuju na oslanjanje na heuristike (npr. De Neys i Glumicic, 2008; De Neys, Vartanian i Goel, 2008). Dio teoretičara smatra da je ključna determinanta oslanjanja na heuristike u nekongruentnim zadacima neadekvatno nadziranje kognitivnih procesa, odnosno, izostanak detekcije konflikta (Kahneman i Frederick, 2002). Prema drugim teoretičarima, ljudi detektiraju konflikt, ali imaju teškoće s inhibicijom heuristika (Epstein, 2010). Detektiranje konflikta uočeno je u izvještajima sudionika o načinu rješavanja nekongruentnih zadataka. Naime, sudionici su navodili da su „znali“ da odgovor nije racionalan, ali su „osjećali“ da je heuristik koji im je pao na pamet ipak najbolje rješenje (Denes-Raj i Epstein, 1994; Kirkpatric i Epstein, 1992). Detekcija konflikta uočava se i u prethodno opisanim verbalnim protokolima prilikom ispitivanja paralelno-kompetitivnog i standard-intervencija modela (Evans, 2007).

Istraživanja usmjerena na pozadinske procese obrade informacija (npr. detekcija konflikta između heurističkog i analitičkog procesiranja) provjeravala su uočavaju li sudionici uistinu ovaj konflikt ili su procesi nadgledanja obrade informacija neadekvatni pa ga sudionici ni ne uočavaju (De Neys, 2012). U istraživanjima je uspoređivano vrijeme odgovaranja na kongruentne zadatke (heuristik je ujedno i normativno točan odgovor na zadatak) i na prethodno spomenute nekongruentne zadatke (heuristik je u konfliktu s analitičkim odgovorom i nije normativno točan), kao i procjena sigurnosti u točnost odgovora. Pokazalo se da je vrijeme odgovaranja bilo najduže kada su sudionici odgovorili točno na nekongruentne zadatke, ali su i sudionici koji su odgovorili u skladu s heuristikom duže odgovarali na nekongruentne zadatke nego što su odgovarali na kongruentne zadatke (De Neys i Glumicic, 2008). Nadalje, procjena

da je odgovor točan niža je kada sudionici odgovaraju u skladu s heuristikom na nekongruentne zadatke nego kada odgovaraju točno na nekongruentne zadatke i točno na kongruentne zadatke (De Neys, Cromheek i Osman, 2011). Istraživanja su pokazala da se odgovori na nekongruentne zadatke (točni odgovori, kao i odgovori sukladni heuristicima), u odnosu na odgovore na kongruentne zadatke, procesiraju manje fluentno i s manjim stupnjem sigurnosti u točnost odgovora (Bonner i Newell, 2010; Dujmović i Valerjev, 2018; Thompson, Prowse Turner i Pennycook, 2011).

Istraživanja koja su provjeravala detekciju konflikta kroz aktivnost središnjeg i autonomnog živčanog sustava pokazala su, također, da sudionici detektiraju konflikt između intuitivnog i analitičkog odgovora. Točnije, u nekongruentnim je zadacima aktivnost autonomnog živčanog sustava, mjerena preko provodljivosti kože, veća nego u kongruentnim zadacima (De Neys, Moyens i Vansteenwegen, 2010). Područja središnjeg živčanog sustava, uključena u detekciju konflikta (tj. anteriorni cingularni korteks), aktiviraju se prilikom odgovaranja na nekongruentne zadatke, čak i kada osoba odgovori u skladu s heuristicima (De Neys i sur., 2008). Tada se, međutim, ne aktivira područje važno za inhibiciju odgovora (tj. desni lateralni prefrontalni korteks). De Neys (2010, str. 30) stoga zaključuje da, iako ljudi ne mogu verbalizirati koje logičke principe su prekršili kada se oslanjaju na heuristike, oni mogu detektirati konflikt između heuristika i logičkih principa te imaju „osjećaj da je nešto pošlo po zlu“. Osim toga, istraživanja pokazuju da se konflikt može detektirati i prilikom rješavanja zadataka s vremenskim ograničenjem, odnosno, da se on može detektirati vrlo brzo (Bago i De Neys, 2019). Detekcija konflikta u situaciji s vremenskim ograničenjem uočena je i kada su korištene EEG mjere (porast amplituda u područjima zaduženima za nadziranje procesiranja informacija i inhibiciju) (Bago, Freyd, Vidal, Houdé, Borst i De Neys, 2018). Pritom je ponovno uočeno da se izostanak točnog odgovora može pripisati smanjenoj aktivaciji područja u mozgu bitnih za inhibiciju.

Može se uočiti da je detekcija konflikta potvrđena u brojnim istraživanjima koja su koristila različite mjere detekcije konflikta. Međutim, u istraživanju u kojem su odnosi između pojava u zadatku bili implicitno navedeni i manje ekstremni u odnosu na odnose koje su koristili De Neys i suradnici u prethodno navedenim istraživanjima, sudionici nisu bili uspješni u detekciji konflikta, mjereno preko vremena rješavanja zadataka (Pennycook, Fugelsang i Koehler, 2012). Dakle, detekcija konflikta ovisi o vrsti zadatka pa je potrebno provesti daljnja istraživanja kako bi se provjerilo kod kojih se sve heuristika i vrsta zadataka detektira konflikt.

U novijoj se literaturi postojanje konflikta ne pripisuje isključivo aktivaciji i procesiranja Tipa 1 i Tipa 2. Tako, primjerice, Bago i De Neys (2019) navode da duže rješavanje

nekongruentnih zadataka nego kongruentnih zadataka kod osoba koje točno riješe zadatke pokazuje konflikt između intuitivnog i logičnog odgovora procesiranja Tipa 1, bez aktivacije procesiranja Tipa 2. Točnije, navodi se da konflikt nastaje zbog aktivacije više odgovora procesiranja Tipa 1, i tek nakon detekcije konflikta uključuje se procesiranje Tipa 2 (Bago i De Neys, 2019; Pennycook, Fugelsang i Koehler, 2015). Osim detekcije konflikta, u okviru literature o meta-rezoniranju navodi se važnost metakognicije kao „okidača“ procesiranja Tipa 2 te se ona obično naziva procesiranjem Tipa 3 (De Neys, 2014).

1.3.5. Procesiranje Tipa 3 i meta-rezoniranje

Metakognicija predstavlja procesiranje informacija o vlastitoj kogniciji (Efklides, 2006). Dva su načina na koje je metakognicija povezana s kognicijom: preko nadgledanja kognicije i preko regulacije/kontrole kognicije (Flavell, 1979; Nelson i Narens, 1994). Kroz procese nadgledanja, metakognicija dobiva informacije o kognitivnim procesima i na temelju njih stvara reprezentaciju kognicije. Koristeći stvorene reprezentacije, metakognicija preko izvršnih funkcija regulira kognitivne procese.

Dva su oblika metakognitivnog nadgledanja: metakognitivno znanje i metakognitivna iskustva (Efklides, 2009, 2014). Metakognitivno znanje deklarativno je znanje, implicitno ili eksplicitno, pohranjeno u dugoročnom pamćenju, koje osoba posjeduje o vlastitoj i tuđoj kogniciji. Osim toga, metakognitivno znanje uključuje i znanje o zadatku i strategijama rješavanja zadatka. Također, ono sadrži znanje, odnosno ideje, uvjerenja, teorije o kognitivnim funkcijama (npr. metamemorija, metapažnja), epistemičku kogniciju (tj. kriterije za procjenu valjanosti metakognitivnog znanja), te teoriju uma.

Metakognitivna iskustva se temelje na nadgledanju obilježja procesiranja zadatka i/ili njegovog ishoda. Ona služe kao posrednik između situacije i osobe, a dijele se na metakognitivne osjećaje i prosudbe/procjene (Efklides, 2006; Schwarz, 2010). Metakognitivni osjećaji rezultat su nadgledanja kognicije i imaju kvalitetu ugode ili neugode. Oni informiraju osobu o kogniciji, ali čine to na iskustveni način, u obliku osjećaja, kao što su osjećaj znanja, točnosti (tj. sigurnosti da je odgovor točan), poznatosti, težine ili zadovoljstva. Metakognitivna iskustva međusobno su povezana, pa je, primjerice, osjećaj da je odgovor točan povezan s manjim osjećajem težine zadatka (Bajšanski, Močibob i Valerjev, 2014; Efklides, Samara i Petropoulou, 1999). Metakognitivne su prosudbe, primjerice, prosudba o učenju, metakognitivnim osjećajima i njihovim izvorima (npr. izvor osjećaja poznatosti), kao i prosudba o zahtjevima kognitivnog procesiranja (npr. koliko je truda i vremena potrebno za

procesiranje zadatka ili je li ishod procesiranja točan). Metakognitivna iskustva smatraju se teško uhvatljivima i nestabilnima jer su kratkotrajna i ne mogu se pratiti tijekom vremena bez izazivanja promjene u njima (Norman, Price i Duff, 2010).

Metakognitivni procesi, uključeni u nadgledanje i regulaciju kognicije u području rezoniranja, nazivaju se meta-rezoniranje Definirana su dva teorijska pristupa koja u okviru meta-rezoniranja proučavaju odnos između nadgledanja i regulacije: model smanjivanja kriterija (engl. *The Diminishing Criterion Model*), koji opisuje determinantne metakognitivnih iskustava u području meta-rezoniranja, i teorija metakognitivnog rezoniranja, koja opisuje važnost metakognitivnih iskustava za procesiranje Tipa 2 (Ackerman i Thompson, 2017).

1.3.5.1. Model smanjivanja kriterija

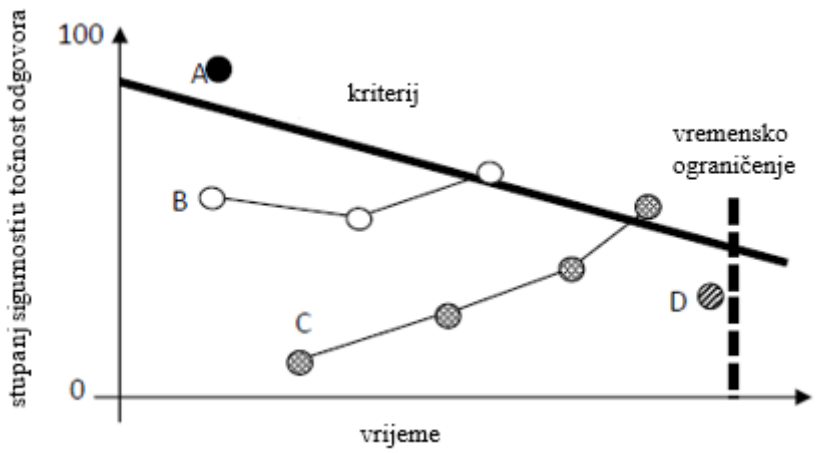
U literaturi se kao ključna determinanta metakognitivnih iskustava navodi način procesiranja informacija (Koriat i Levy-Sadot, 2000; Norman i sur., 2010). Naime, informacije se procesiraju više ili manje fluentno (tj. s većom ili manjom lakoćom), a upravo fluentnost dovodi do pozitivnog ili negativnog afekta, koji se manifestira u obliku metakognitivnih iskustava (Koriat, Bjork, Sheffer i Bar, 2004; Reber i Greifeneder, 2017; Thompson i Morsanyi, 2012). Thompson i suradnici (2011), razlikuju fluentnost odgovora i fluentnost procesiranja informacija. Fluentnost odgovora odnosi se na brzinu kojom osobi odgovor padne na pamet, dok se fluentnost procesiranja informacija odnosi na lakoću obrade informacija (Schwarz, 2004; Thompson i sur., 2011). Obje vrste fluentnosti najčešće se određuju mjerenjem vremena odgovaranja na zadatke. Dakle, smatra se da metakognitivna iskustva predstavljaju svjesne manifestacije nesvjesnih aspekata procesiranja informacija, poput fluentnosti procesiranja ili brzine kojom se osoba dosjeti nekog odgovora (Norman i sur., 2010; Thompson i sur., 2011).

Fluentnost procesiranja informacija odnosi se na različita obilježja zadatka pa može biti perceptivna (tj. lakoća procesiranja zbog vizualnih obilježja podražaja), konceptualna (tj. lakoća procesiranja zbog semantičkih obilježja podražaja) i lingvistička (tj. lakoća procesiranja zbog fonoloških obilježja podražaja) (Alter i Oppenheimer, 2009; Schwarz, 2004). Primjerice, kada su sudionici u istraživanjima trebali procijeniti istinitost logičkih zaključaka, fluentnost procesiranja povećala je vjerojatnost da će zaključak biti procijenjen istinitim kada je prethodni zaključak bio manje fluentno procesiran, ali ne i kada je bio fluentno procesiran (Hansen, Dechene i Wanke, 2008). Pritom su istraživači manipulirali fluentnošću procesiranja tako da su neke zaključke prikazivali s većim kontrastom između pozadine i fonta (manje fluentno procesiranje), a druge zaključke s manjim kontrastom (fluentnije procesiranje) (Thompson i

Morsanyi, 2012). Nadalje, u istraživanju Altera, Oppenheimera, Epleyja i Eyre (2007) manipulirano je fontom i facijalnom ekspresijom kako bi se smanjila fluentnost procesiranja informacija. Pokazalo se da su sudionici koji su čitali zadatke napisane teško čitljivim fontom i oni koji su se mrštili, imali veći osjećaj težine zadataka. S druge strane, kada osoba naiđe na poznati podražaj, fluentnost procesiranja je veća, što rezultira pozitivnim afektom i metakognitivnim osjećajem poznatosti (Efklides i sur., 1999).

U literaturi o meta-rezoniranju oblik fluentnosti, na koji su se istraživači najčešće usmjerili, bila je fluentnost odgovora. Istraživanja o odnosu između fluentnosti (mjerene preko vremena odgovaranja) i metakognitivnih iskustava pružila su nekonzistentne rezultate. Time nisu u potpunosti potvrdila važnost fluentnosti odgovora kao determinante metakognitivnih iskustava. Prema modelu redukcije diskrepance korelacija između metakognitivnih iskustava i vremena odgovaranja niska je ili nulta jer ljudi zaustavljaju rezoniranje u trenutku kada dođu do zadovoljavajućeg odgovora, neovisno o vremenu koje je pritom proteklo (Ackerman i Goldsmith, 2011; Dunlosky i Hertzog, 1998). Druga istraživanja pokazuju negativnu korelaciju između metakognitivnih iskustava i vremena odgovaranja (Pleskac i Busemeyer, 2010; Shynkaruk i Thompson, 2006; Thompson i sur., 2011, 2013).

Kako bi se razriješile nekonzistentnosti u stajalištima i rezultatima istraživanja, definiran je model smanjivanja kriterija. Ovaj model pretpostavlja da osoba posjeduje kriterije koji pokazuju razine metakognitivnih iskustava koje moraju biti zadovoljene da bi osoba zaustavila proces rezoniranja i traženja zadovoljavajućeg odgovora (Ackerman, 2014). Model pretpostavlja i to da se, na razini pojedinca, razina metakognitivnih iskustava povećava s vremenom, što je prikazano na slici 2. Važno je napomenuti da je sigurnost u točnost odgovora metakognitivno iskustvo koje je najčešće proučavano u okviru modela o smanjivanju kriterija. Pritom, istraživači u području meta-rezoniranja razlikuju procjene sigurnosti u točnost odgovora nakon odgovaranja na zadatke s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska (Ackerman, 2014; Thompson i sur., 2011). Kada se radi o odgovaranju s vremenskim pritiskom, a time i poticanju davanja automatskog i intuitivnog odgovora, sigurnost u točnost odgovora naziva se osjećaj točnosti (engl. *feeling of rightness*, FOR) Prilikom odgovaranja na zadatke bez vremenskog pritiska, govorimo ili samo o sigurnosti u točnost odgovora (engl. *confidence*) ili konačnoj prosudbi sigurnosti u točnost odgovora (engl. *final judgment of confidence*, FJC).



Slika 2. Prikaz pretpostavki modela smanjivanja kriterija (Ackerman, 2014). Preuzeto iz „The Diminishing Criterion Model for metacognitive regulation of time investment“, *Journal of Experimental Psychology: General*, *143*(3), str. 1351.

Na slici 2 prikazan je graf na kojem se nalazi četiri primjera osoba (A, B, C i D) i njihov stupanj sigurnosti u točnost odgovora. Kao što se može vidjeti na slici 2, osoba A brzo generira odgovor kojim je zadovoljna i smatra ga točnim. Osobe B, C i D sporije generiraju odgovor i njihova je početna razina sigurnosti da je odgovor točan ispod kriterija koji mora biti postignut da bi te osobe zaustavile rezoniranje u toj situaciji. Međutim, kod osoba B i C može se uočiti da osjećaj sigurnosti da je odgovor točan raste s vremenom, što bi se moglo očitovati u pozitivnoj korelaciji između vremena odgovaranja i stupnja sigurnosti na razini pojedinca. Osoba D nije došla do zadovoljavajućeg odgovora i kada bi imala mogućnost odustati od rješavanja zadataka, vjerojatno bi to i učinila. Važno je uočiti da bi između stupnja sigurnosti i vremena odgovaranja korelacija na ovom uzorku od četiri osobe bila negativna.

Ackerman (2014) je u pet eksperimenata potvrdila pretpostavke modela smanjivanja kriterija. Istraživanje je pokazalo da se u jednostavnim zadacima može primijeniti model redukcije diskrepance, odnosno korelacije između vremena odgovaranja i metakognitivnog osjećaja naučenosti (tj. osjećaj da je osoba nakon učenja nešto naučila) slabe su ili nulte. U složenijim zadacima potvrđuje se model smanjivanja kriterija. Naime, tijekom odgovaranja sudionici koji se ne sjete odmah odgovora na zadatak traže zadovoljavajući odgovor sve dok ne dosegnu zadovoljavajuću razinu sigurnosti u točnost odgovora. Pritom je uočeno da sudionici kojima odgovor na zadatak brzo padne na pamet imaju veću razinu sigurnosti u točnost tog odgovora, nego sudionici koji duže vrijeme traže zadovoljavajući odgovor, što rezultira negativnom korelacijom između vremena odgovaranja i osjećaja sigurnosti da je odgovor točan. Kada su sudionici imali mogućnost odabira odgovora „ne znam“, taj odgovor odabirali su nakon

dužeg vremena razmišljanja, a ne brzo nakon prezentiranja zadatka. Dakle, sudionici biraju odgovor „ne znam“ kada ne mogu pronaći odgovor koji bi bio na zadovoljavajućoj razini sigurnosti u točnost tog odgovora, a ne zbog brzog odustajanja od rješavanja zadatka. Nadalje, kada su sudionici bili izloženi novčanom poticaju za rješavanje zadataka, zadovoljavajuća razina sigurnosti bila je niža za poticaje manjeg novčanog iznosa, nego za one većeg novčanog iznosa. Konačno, negativna korelacija između vremena rješavanja zadataka i osjećaja sigurnosti ostvarena je u situacijama i s vremenskim ograničenjem i bez vremenskog ograničenja.

Rezultati u ovim eksperimentima sugeriraju da procesi „od dolje prema gore“ (npr. fluentnost procesiranja) determiniraju metakognitivna iskustva koja su važna za procesiranje Tipa 1 i aktivaciju procesiranja Tipa 2, dok „od gore prema dolje“ procesi djeluju na određivanje kriterija zadovoljavajućeg osjećaja sigurnosti u točnost odgovora. Kada su zadaci jednostavni, procesi „od dolje prema gore“ imaju veću važnost jer takvi zadaci nisu vremenski i kognitivno opterećujući pa je fluentnost procesiranja salijentna i može determinirati metakognitivna iskustva. Nadalje, pretpostavljeno je da se obrada u složenim zadacima prvenstveno odvija na temelju procesa „od gore prema dolje“, odnosno ljudi uzimaju u obzir motivaciju, obilježja zadatka, vrijeme uloženo u rješavanje zadataka i metakognitivna iskustva kada rješavaju zadatke i donose odluke. Kada u takvim zadacima postoji vremensko ograničenje, negativna korelacija (kao npr. u istraživanju Thompson i suradnika, 2011) odraz je procesa „od dolje prema gore“ i fluentnosti procesiranja informacija, dok je u situaciji bez vremenskog ograničenja negativna korelacija odraz procesa „od gore prema dolje“ i prethodno opisanog smanjivanja kriterija.

Među procesima „od gore prema dolje“ koji djeluju na formiranje metakognitivnih iskustava navode se različiti osobinski i situacijski čimbenici (Ackerman, 2019). Među osobinskim činiteljima su znanje ili uspjeh pojedinca u nekom području (Kruger i Dunning, 1999). Tako sudionici koji imaju veći broj točno riješenih zadataka bolje razlikuju zadatke koje su točno riješili i one koje su netočno riješili u odnosu na sudionike koji imaju manji broj točno riješenih zadataka (Bajšanski i sur., 2014). Među poznatijim su istraživanjima o važnosti znanja za usklađenost metakognitivnih iskustava i objektivnih pokazatelja uratka istraživanja Dunning-Kruger efekta (Kruger i Dunning, 1999). Naime, učenici i studenti koji imaju lošiji uspjeh u nekom testu precjenjuju točnost svojeg uratka, dok učenici i studenti s boljim uratkom točno procjenjuju svoj uradak ili čak podcjenjuju, što je poznato kao Dunning-Kruger efekt ili efekt „nevješti i nesvjesni“ (engl. *unskilled and unaware effect*) (Kruger i Dunning, 1999). Pritom učenici i studenti s lošijim uratkom nisu svjesni svojih netočnih procjena, odnosno,

njihove procjene drugog reda (tj. procjena je li procjena sigurnosti točna) su niske neovisno o promjenama u uratku (Fritzsche, Händel i Kröner, 2018).

Među osobinskim čimbenicima navode se i uvjerenja pojedinca, kao što je uvjerenje o djelovanju podražajnog materijala na pamćenje (Mueller, Dunlosky i Tauber, 2016) ili uvjerenja o djelovanju glasnoće na procesiranje informacija (Frank i Kuhlmann, 2017). Također, procjene metakognitivnih iskustava koje se daju prilikom rješavanja zadataka uz vremenski pritisak niže su, nego procjene koje se daju prilikom rješavanja zadataka bez vremenskog pritiska, neovisno o stvarnom uratku. Ovaj rezultat pripisuje se uvjerenjima sudionika o odnosu između vremena i točnosti (Shynkaruk i Thompson, 2006). Naime, smatra se, što se više vremena utroši u razmišljanje, veća je vjerojatnost da je odgovor točan, pa je time osoba i sigurnija da je točno odgovorila na zadatak.

Konačno, važni su i kognitivni stilovi pa su tako osobe s metakognitivnim uvjerenjem da su uspješne u rezoniranju (npr. imaju izraženu potrebu za spoznajom), sigurnije u svoje odgovore u odnosu na osobe koje su uvjerene da nisu uspješne u rezoniranju, iako u točnosti njihovih odgovora nema razlika (Prowse Turner i Thompson, 2009).

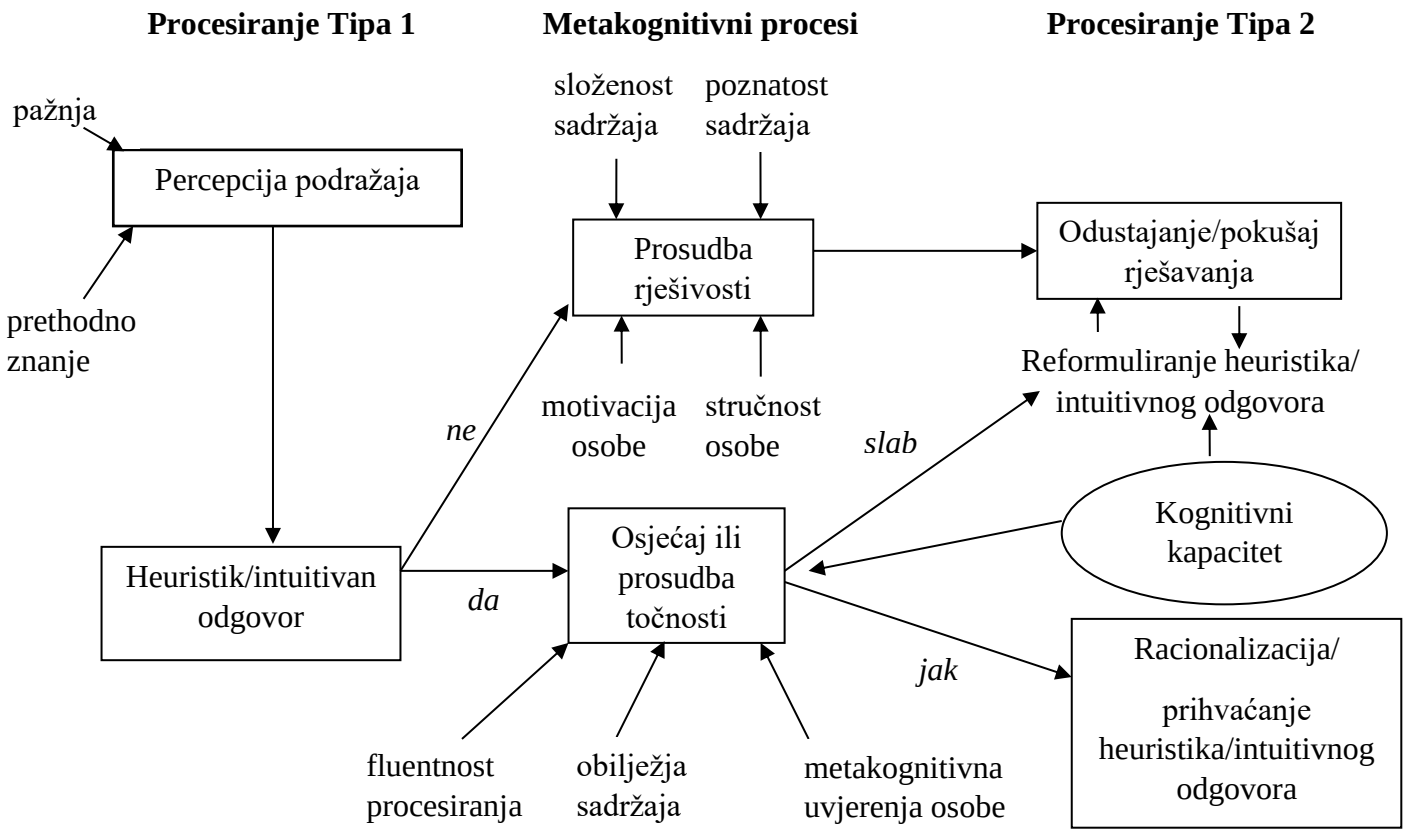
Što se tiče situacijskih čimbenika, učenje iz papirnatih materijala pokazuje se učinkovitijim od učenja pomoću računala u situaciji s vremenskim pritiskom, ali razlike u učinku nisu bile praćene razlikama u metakognitivnim iskustvima (Ackerman i Lauterman, 2012). Nadalje, osjećaj sigurnosti da je odgovor točan veći je kada su točni odgovori intuitivni, nego kada su neintuitivni (Simmons i Nelson, 2006). Ovaj osjećaj je izraženiji i kada sudionici mogu upotrijebiti svoje znanje kako bi rezonirali o zadacima nego kada su zadaci nepoznati (Shynkaruk i Thompson, 2006). Dulje vrijeme izloženosti podražajima i više ponavljanja povećavaju sigurnost sudionika u točnost njihovih sjećanja (Busey, Tunnicliff, Loftus i Loftus, 2000). Osim toga, usidravanje (engl. *anchoring*) ima važnu ulogu. Naime, kada je osoba izložena većim brojevima u podražajnom materijalu, procjenjuje FOR većim nego kada je izložena manjim brojevima (Wang i Thompson, 2019).

Budući da metakognitivna iskustva ovise o obilježjima procesiranja informacija te osobinskim i situacijskim čimbenicima, ona nisu potpuno usklađena s objektivnim obilježjima situacije i točnošću odgovora (Efklides i sur., 1999; Schraw, 2009). Tako istraživanje pokazuje da sudionici imaju veći osjećaj da je njihov odgovor točan kada točno riješe zadatke, ali je korelacija mala do umjerena (Bajšanski i sur., 2014; Norman i Furnes, 2016). Nadalje, procjene točnosti prije rješavanja silogizama u manjoj mjeri omogućuju predviđanje stvarne točnosti u odnosu na procjene nakon rješavanja silogizama (Bajšanski i sur., 2014). Usklađenost metakognitivnih iskustava i realnosti određuje se preko apsolutne i relativne točnosti

metakognitivnih iskustava (Benjamin i Diaz, 2008; Efklides, 2014; Schraw, 2009). Apsolutna točnost ili kalibracija predstavlja stupanj slaganja između prosječne metakognitivne procjene i stvarnog rezultata. Relativna točnost ili rezolucija odnosi se na stupanj u kojem osoba može razlikovati zadatke po pojedinim obilježjima i računa se pomoću Goodman-Kruskal gamma koeficijenta kojim se određuje slaganje između metakognitivnih procjena i stvarnog rezultata.

1.3.5.2. Teorija metakognitivnog rezoniranja

Prema teoriji metakognitivnog rezoniranja (Thompson, 2009), metakognitivna iskustva ključan su posrednik između procesiranja Tipa 1 i Tipa 2 te imaju važnu ulogu u odlučivanju treba li odgovor koji je kognicija generirala u okviru procesiranja Tipa 1 prihvatiti ili korigirati. Drugim riječima, na temelju metakognitivnih iskustava, kroz tzv. metakognitivno posredovanje, može se inhibirati automatski generiran odgovor procesiranja Tipa 1, razlikovati odgovore koje su rezultat procesiranja Tipa 1 i Tipa 2, te usporediti ove odgovore kako bi se donio najprikladniji odgovor u određenoj situaciji (Amsel i sur., 2008; Erbas i Okur, 2012). Konačan rezultat metakognitivnog posredovanja ranije su spomenute intervencije procesiranja Tipa 2, odnosno prihvaćanje odgovora procesiranja Tipa 1 od strane procesiranja Tipa 2 ili njegova korekcija (Thompson, 2009). Prema teoriji metakognitivnog rezoniranja, metakognitivna iskustva koja posreduju između procesiranja Tipa 1 i Tipa 2 su metakognitivni osjećaj točnosti (FOR) i prosudba rješivosti (engl. *judgment of solvability*). Uključenost prosudbe rješivosti u donošenje određenog odgovora ovisi o poznatosti sadržaja koji se procesira, a time i o jačini procesiranja Tipa 1 (Thompson, 2009). Teorija metakognitivnog rezoniranja shematski je prikazana na slici 3.



Slika 3. Shematski prikaz teorije metakognitivnog rezoniranja (Thompson, 2009). Preuzeto iz „Dual-process theories: A metacognitive perspective“ od J. St. B. T. Evans i K. Frankish (Ur.), In two minds: Dual processes and beyond (str. 172). Oxford: Oxford University Press.

Kao što se može vidjeti na slici 3, kada osoba procijeni da ima dovoljno znanja i iskustva da može generirati određeni odgovor, posrednik između procesiranja Tipa 1 i Tipa 2 je FOR. Kada je FOR snažniji (tj. osoba vjeruje da je odgovor točan), manja je vjerojatnost da će preispitivati taj odgovor kasnije, odnosno, procesiranje Tipa 2 neće analizirati odgovor generiran od strane procesiranja Tipa 1 i prihvatit će početni odgovor (Thompson i Morsanyi, 2012; Thompson i sur., 2011). Determinante osjećaja točnosti mogu se podijeliti u tri prethodno spomenute kategorije (Ackerman, 2019; Thompson, 2009): fluentnost procesiranja, situacijski čimbenici (npr. obilježja sadržaja) i osobinski čimbenici (npr. metakognitivna uvjerenja).

Međutim, sadržaj ili kontekst neke situacije ili zadatka može biti nepoznat i time ne uključuje dovoljno znakova koji bi potaknuli barem minimalno zadovoljavajući odgovor procesiranja Tipa 1 (Thompson, 2009). Osnovna dilema s kojom se osoba tada susreće odnosi se na procjenu hoće li uopće pokušati generirati neki odgovor ili ne. Ako je osoba već započela

rješavanje nekog zadatka i naišla na velike prepreke u tom procesu, susreće se s dilemom hoće li nastaviti koristiti trenutne strategije, pronaći nove strategije ili prekinuti rješavanje zadatka. Metakognitivni proces koji posreduje između zadatka i odluke o njihovom rješavanju naziva se prosudba rješivosti. Ova prosudba se donosi na samom početku rješavanja zadataka, ali se revidira tijekom procesa rješavanja.

Kako bi se provjerila uloga metakognitivnih iskustava u posredovanju između procesiranja Tipa 1 i Tipa 2, korištena je paradigma dvostrukog odgovaranja. Tako su u istraživanju Shynkaruk i Thompson (2006) korišteni silogizmi koji su se razlikovali s obzirom na sukladnost vjerovanjima pojedinca i valjanost. Sudionici su za svaki silogizam procijenili je li ponuđena konkluzija točna ili netočna. Osim toga, na svaki silogizam odgovarali su dva puta, jednom s vremenskim ograničenjem od 10 sekundi, a drugi puta su imali na raspolaganju jednu minutu za davanje svojeg konačnog odgovora. Nakon prvog odgovaranja procjenjivali su na skali od sedam stupnjeva FOR. Vremenski pritisak služio je za poticanje oslanjanja na procesiranje Tipa 1 i površnu intervenciju procesiranja Tipa 2. Pokazalo se da su sudionici bili spremniji promijeniti početni odgovor prilikom drugog odgovaranja kada je FOR bio nizak. Ovo istraživanje pokazuje da osjećaj točnosti ima važnu ulogu u odabiru odgovora. Međutim, moguće je da je prvo rješavanje zadatka djelovalo na drugi pokušaj rješavanja zadatka.

Paradigma dvostrukog odgovaranja stoga je proširena uvođenjem mješovitog nacrta (Thompson, 2009). U zavisnom dijelu nacrta (tj. ponovljena mjerenja) nezavisna je varijabla vrijeme koje je sudionicima dopušteno za odgovaranje. Točnije, u prvom pokušaju odgovaranja sudionici trebaju odgovoriti prvim odgovorom koji im padne na pamet. Nakon što odgovore, sudionici procjenjuju FOR. Odmah nakon toga imaju drugi pokušaj rješavanja istog zadatka i tada smiju razmišljati koliko god je potrebno ili žele kako bi dali što točniji odgovor. Nakon drugog odgovaranja daje se konačna procjena sigurnosti u točnost odgovora (FJC). Zavisne varijable su: 1) FOR; 2) promjena odgovora u drugom mjerenju; 3) točnost odgovora; 4) vrijeme potrebno za davanje odgovara i u prvom i u drugom odgovaranju. Nezavisni dio nacrta uključuje dvije kontrolne grupe, uz ovu eksperimentalnu grupu. U jednoj kontrolnoj grupi sudionici daju samo odgovore koji im prvi padnu na pamet i nakon toga procjenjuju FOR. U drugoj kontrolnoj grupi sudionici daju samo odgovore bez vremenskog pritiska i nakon toga procjenjuju osjećaj je li odgovor točan.

U do sada provedenim istraživanjima pomoću proširene paradigme dvostrukog odgovaranja korišteni su zadaci iz područja mišljenja i rezoniranja, poput Wasonovog zadatka odabira, silogizama i Frederickovog (2005) Testa kognitivne refleksivnosti (Bago i De Neys, 2019; Thompson, Evans i Campbell, 2013; Thompson i Johnson, 2014; Thompson i sur., 2011,

2013). Pokazalo se da je korelacija između FOR-a, vremena rješavanja zadataka i promjene odgovora negativna. Naime, sudionici koji imaju snažniji FOR kraće razmišljaju prije davanja odgovora prilikom drugog odgovaranja (tj. vremenski neograničenog rješavanja zadatka) i manje su spremni promijeniti svoj odgovor. Pritom se pokazuje da je korelacija između broja promjena odgovora i točnosti odgovora u drugom rješavanju zadatka gotovo nulta i statistički neznačajna, što pokazuje da sudionici podjednako često mijenjaju točne odgovore u pogrešne i obrnuto. Može se stoga pretpostaviti da prihvaćanje ili promjena odgovora procesiranja Tipa 1 proizlazi iz snažnog metakognitivnog osjećaja da je određeni odgovor točan. Osim toga, pokazuje se da je korelacija između FJCa- i vremena rješavanja zadataka negativna, odnosno, i u situaciji bez vremenskog pritiska pokazalo se da sudionici imaju veći osjećaj točnosti kada brže odgovore na zadatak, što je sukladno modelu smanjivanja kriterija (Ackerman, 2014).

Nadalje, uočava se da sudionici ostaju kod svojeg početnog odgovora u 70-80% slučajeva, odnosno često nisu spremni promijeniti svoj odgovor u zadacima procjene valjanosti zaključaka (tj. prilikom rješavanja silogizama) (Bajšanski i Žauhar, 2019; Shynkaruk i Thompson, 2006; Thompson i sur., 2011). Pritom je korelacija između broja promjena odgovora i vremena rješavanja zadataka prilikom drugog odgovaranja niska i/ili statistički neznačajna, odnosno sudionici koji mijenjaju odgovore ulažu vrijeme u rješavanje zadataka kada ih drugi puta rješavaju kao i sudionici koji ostaju kod svojeg početnog odgovora. Pretpostavlja se stoga da sudionici često dodatno vrijeme koje imaju na raspolaganju ulažu u racionalizaciju početnog odgovora, a ne traženje optimalnog rješenja. Sukladno tome, korelacija između vremena rješavanja zadataka i točnosti odgovora prilikom drugog rješavanja je negativna, što pokazuje da uloženo dodatno vrijeme u razmišljanje ne dovodi do normativno točnih rješenja. Stoga se ne preporuča, kao što je ranije i spomenuto, izjednačavati procesiranje Tipa 2 s normativnom točnošću odgovora (Elqayam i Evans, 2011). Konačno, FOR i normativna točnost kod drugog odgovaranja u niskoj su pozitivnoj korelaciji (Thompson i sur., 2011) ili statistički neznačajnoj korelaciji (Thompson i sur., 2013), iako bi se očekivalo da će manji FOR rezultirati dubljim razinama procesiranja Tipa 2 i točnijim rješavanjem zadataka. Budući da normativna točnost ne ukazuje nužno na hipotetsko i logičko rezoniranje, odnos između FOR-a i normativne točnosti ne smatra se dobrim pokazateljem valjanosti pretpostavki teorije metakognitivnog rezoniranja (Thompson i sur., 2011).

1.3.6. Individualne razlike u procesiranju informacija

Dva su najčešće ispitivana korelata sklonosti davanju odgovora sukladnih heuristicima: kognitivne sposobnosti (tj. verbalna i/ili neverbalna inteligencija; radno pamćenje) i kognitivni stilovi.

Budući da je radno pamćenje, koje je važno za analitičko procesiranje informacija, visoko povezano s intelektualnim sposobnostima, procesiranje Tipa 2 trebalo bi biti pozitivno povezano i s mjerama inteligencije i s mjerama radnog pamćenja (Evans, 2003). Istraživanja nisu pružila konzistentnu potvrdu za navedenu pretpostavku. Sá, West i Stanovich (1999) su utvrdili da studenti viših kognitivnih sposobnosti (mjereno preko verbalnih i neverbalnih testova inteligencije, poput Wechslerovog testa inteligencije, Ravenovih matrica za napredne) u manjoj mjeri odgovaraju na nekongruentne zadatke sukladno heuristicima. Slični rezultati su pokazuju se i u drugim istraživanjima provedenima na studentima uz korišetenje rezultata na testu SAT (engl. *Scholastic Aptitude Test*) za procjenu inteligencije (Stanovich i West, 1998a, 1998b, 1998c; West, Toplak i Stanovich, 2008), kao i na uzorku djece i adolescenata koristeći Wechslerov test inteligencije (Kokis, Macpherson, Toplak, West i Stanovich, 2002).

Međutim, u nizu kasnijih istraživanja provedenima na studentskoj populaciji, Stanovich i West (2008) nisu pronašli povezanost između sklonosti heuristicima i inteligencije određene preko rezultata na SAT-u. Kako bi objasnili ovi rezultati, navedeni autori su predložili okvir prema kojem se mogu objasniti individualne razlike u odgovaranju na heuristike te posljedično varijabilitet u korelacijama između sklonosti heuristicima i inteligencije. Prema tom okviru, kada osoba nema potrebno znanje u nekom području, što autori nazivaju *mindware gap*, na zadatke može odgovarati samo na temelju heuristika koje je kroz iskustvo stekla. Kao što je ranije spomenuto, kada osoba posjeduje *mindware*, može ga upotrijebiti te u nekom zadatku odgovoriti u skladu s normativnim načelima i zanemariti heuristike. Međutim, kako bi u tome uspjela, osoba mora detektirati konflikt između odgovora sukladnog heuristicima i odgovora sukladnog logičkim/racionalnim pravilima. Konačno, nakon detekcije konflikta mora inhibirati heuristike i provesti razdvajanje (tj. prethodno spomenuti *cognitive decoupling*).

Dakle, *mindware* se smatra nužnim da bi došlo do detekcije konflikta, ali čak i kad je detekcija konflikta prisutna, ne dolazi nužno do inhibicije netočnog odgovora (Stanovich, 2018). Naime, kao što pokazuju rezultati iz prethodno opisanih istraživanja De Neysa i suradnika (npr. De Neys i Glumicic, 2008), ljudi u pravilu detektiraju konflikt između odgovora sukladnog heuristicima i odgovora sukladnog logičkim/racionalnim pravilima, ali ne inhibiraju heuristike pa su odgovori u konačnici normativno netočni. Stoga se važnijim čimbenikom za

odgovaranje sukladno logičkim pravilima smatra proces inhibiranja (De Neys, 2014), koji je ključan i za manifestiranje individualnih razlika u odgovaranju na nekongruentne zadatke (Stanovich i West, 2008). Važno je napomenuti da kada su zadaci previše lagani, pa ne zahtijevaju značajne kapacitete inhibiranja i razdvajanja, ili su previše teški, pa skoro svi u njima griješe te ni visoki kapaciteti inhibiranja i razdvajanja nisu dovoljni, korelacija između davanja odgovora sukladnih heuristicima i inteligencije bit će niska ili nulta zbog niskog varijabiliteta u rješavanju zadataka.

Kad je riječ o radnom pamćenju, s jedne se strane pokazalo da osobe manjeg kapaciteta radnog pamćenja češće koriste heuristike u rješavanju silogizama od osoba većeg kapaciteta radnog pamćenja (Verschueren, Schaeken i D'Ydewalle, 2005). S druge strane, rezultati pokazuju da osobe većeg kapaciteta radnog pamćenja mogu postići i lošiji uradak u zadacima rezoniranja. Tako su u istraživanju Corbina, McElroyja i Black (2010) korišteni zadaci uokviravanja, poput problema o azijskoj bolesti. U tim zadacima sudionici trebaju odabrati hoće li provoditi program za smanjenje posljedica bolesti ako se očekuje da će, primjerice, od 600 osoba 1) njih 200 biti spašeno ili 2) ako se očekuje da će ih 400 umrijeti. Dakle, broj ljudi koji će umrijeti jednak je u obje situacije, ali ljudi najčešće biraju prvu opciju jer se govori o spašenim životima, a ne o umrlima. Iako se očekuje da će osobe većeg kapaciteta radnog pamćenja imati bolji uradak u ovakvim zadacima, prethodno navedeni autori nisu potvrdili tu pretpostavku. Točnije, osobe većeg kapaciteta radnog pamćenja bile su sklonije efektu uokviravanja od osoba manjeg kapaciteta radnog pamćenja. U objašnjavanju ovih rezultata, autori se pozivaju na *fuzzy-trace* teoriju (Reyna i Brainerd, 1995), prema kojoj postoje suštinski (engl. *gist*) tragovi pamćenja i detaljni (engl. *verbatim*) tragovi pamćenja. Smatra se da se osobe većeg kapaciteta radnog pamćenja u većoj mjeri usmjeravaju na sve informacije u tekstu, dok se osobe manjeg kapaciteta radnog pamćenja više usmjeravaju samo na suštinske informacije pa su time i otpornije na uokviravanje.

Iako pojedinac može imati kognitivne sposobnosti potrebne za inhibiciju heuristika, on ne mora nužno, u situaciji u kojoj je potrebno inhibirati heuristike, to i učiniti. Kako bi inhibirao heuristike, potrebna je odgovarajuća uključenost i algoritamskog uma, koji je zadužen za kognitivne sposobnosti, i refleksivnog uma, koji je zadužen za kognitivne stilove (Stanovich, 2009). Dakle, da bi pojedinac inhibirao heuristike, potrebne su odgovarajuće razine kognitivnih stilova zahvaljujući kojima će biti sklon promišljati o zadacima (West i sur., 2008). Kognitivni stilovi ili dispozicije mišljenja predstavljaju stavove o formiranju i promjenama uvjerenja (Stanovich, 2011), kao i stabilne preferencije i strategije koje određuju kako će osoba obrađivati informacije, rješavati probleme i donositi odluke (Kozhevnikov, 2007). Među najčešće

ispitivanim kognitivnim stilovima su iskustveni stil, poznat pod nazivom vjerovanje u intuiciju (oslanjanje na iskustvenu, intuitivnu, afektivnu i holističku obradu informacija), i racionalni stil, poznat pod nazivom potreba za spoznajom (oslanjanje na racionalnu, analitičku obradu informacija) (Epstein, 1990, 1994, 2010). Istraživanja su pokazala da ti stilovi predstavljaju dvije odvojene dimenzije, što se zaključilo na temelju statistički neznačajnih korelacija među njima i različitih obrazaca odnosa s drugim varijablama (npr. potreba za spoznajom u većoj je mjeri pozitivno povezana s kognitivnim sposobnostima i negativno sa psihološkim teškoćama od vjerovanja u intuiciju, a potonji stil u većoj je mjeri pozitivno povezan s empatijom, kreativnošću i zadovoljstvom socijalnim odnosima) (Epstein, Pacini, Denes-Raj i Heier, 1996; Pacini i Epstein, 1999; Witteman, van den Bercken, Claes i Godoy, 2009).

Istražujući odnos kognitivnih stilova i sklonosti odgovaranju na zadatke u skladu s heuristicima, često su korištena prethodno opisana dva stila, ali i drugi stilovi: aktivno otvoreno mišljenje (tj. fleksibilno mišljenje); dogmatizam i apsolutizam (tj. kognitivna rigidnost, vjerovanje u apsolutnu i nepromjenjivu istinu); proturječno mišljenje (engl. *counterfactual thinking*; razmišljanje o mogućim opcijama za situacije koje su se već dogodile); praznovjerje; potreba za kognitivnim zatvaranjem (Stanovich, 2011). Stanovich i West (1998c), kao i Sá i suradnici (1999), pokazali su da studenti su izraženijeg aktivnog otvorenog mišljenja, manje izraženog proturječnog mišljenja te manje izražene kognitivne rigidnosti bili manje skloni odgovaranju u skladu s heuristicima. Pokazalo se također da kognitivni stilovi imaju samostalni doprinos, povrh kognitivnih sposobnosti, u predviđanju sklonosti k oslanjanju na heuristike (Kokis i sur., 2002; West i sur., 2008). Osim toga, kognitivni su stilovi povezani s točnošću procjene uratka. Tako osobe koje navode da su intuitivnije i imaju manje izraženu potrebu za spoznajom, u većoj mjeri podcjenjuju svoje odgovaranje sukladno heuristicima i precjenjuju uradak, u odnosu na osobe s izraženom potrebom za spoznajom (Pennycook, Ross, Koehler i Fugelsang, 2017).

Odnos između kognitivnih stilova i uratka u zadacima ovisi o vrsti zadatka. Primjerice, povezanost potrebe za spoznajom i točnosti rješavanja zadataka bila je pozitivna, a povezanost vjerovanja u intuiciju i točnosti rješavanja zadataka negativna, i to kod zadataka s osnovnom proporcijom (tj. mjerenje sklonosti pojedinaca da se pouzdaju u osobna svjedočenja usprkos postojanju informacija prikupljenih među stručnjacima i/ili na velikom uzorku sudionika) (Bubić i Erceg, 2015), kao i kod procjena vjerojatnosti događaja (Shiloh, Salton i Sharabi, 2002), ali povezanost nije pronašena kod silogizama (Bubić i Erceg, 2015).

Može se zaključiti da sklonost davanju odgovora sukladnih heuristicima ovisi o različitim čimbenicima, uključujući situacijske (npr. vremensko ograničenje), osobinske (npr. kognitivni stilovi, motivacija), kao i kognitivne (npr. *mindware*, kognitivni kapacitet, detekcija konflikta) i metakognitivne čimbenike (De Neys, 2014; Evans, 2009; 2019; Thompson, 2009).

1.3.7. Iluzija proporcionalnosti, teorije dualnih procesa i matematičke kompetencije

Kako bismo bolje razumjeli iluziju proporcionalnosti u okviru teorija dualnih procesa, važno je provjeriti ima li proporcionalnost obilježja heuristika. Gillard, Van Dooren, Schaeken i Verschaffel (2009b) proveli su istraživanje prema prethodno opisanim paradigmama utemeljenima na kronometrijskim istraživanjima i opterećivanju radnog pamćenja sekundarnim zadatkom. Pokazalo se da kada je vrijeme rješavanja zadataka bilo ograničeno i kada je radno pamćenje bilo opterećeno procesiranjem sekundarnog zadatka, učestalost odgovora sukladnih modelu proporcionalnosti u zadacima o neproporcionalnim odnosima (tj. iluzija proporcionalnosti) povećala se, a broj točnih odgovora u zadacima o neproporcionalnim odnosima se smanjio. Dakle, rezoniranje na temelju modela proporcionalnosti bilo je otporno na vremensko ograničenje (tj. može se aktivirati automatski) i na dodatno kognitivno opterećenje radnog pamćenja, što pokazuje da proporcionalnost ima obilježja heuristika pa se naziva i heuristikom proporcionalnosti/linearnosti. Za rezoniranje na temelju modela neproporcionalnosti potrebna je dublja i analitička obrada informacija, koja je kognitivno zahtjevna. Prethodno spomenuto istraživanje Gillarda i suradnika (2009b) pokazalo je da se kod zadataka o proporcionalnom odnosu i neproporcionalnim odnosima, koji uključuju množenje ili dijeljenje višeznamenkastih brojeva, uočavaju ista obilježja heuristika kao i kod jednostavnijih zadataka u kojima zahtjevnije računske operacije nisu potrebne.

Budući da rezoniranje prema neproporcionalnom modelu predstavlja analitičko procesiranje informacija, istraživanja su provjerila detektiraju li ljudi konflikt između heuristika i analitičkog odgovora kada rješavaju ove tipove zadataka. Zadaci o neproporcionalnim odnosima mogu se definirati kao nekongruentni zadaci jer je automatski odgovor u tim zadacima odgovor sukladan modelu proporcionalnosti, a on nije normativno točan odgovor. Zadaci o proporcionalnom odnosu bili bi kongruentni zadaci jer je automatski odgovor ujedno i normativno točan odgovor. Istraživanje Putarek i Vlahović-Štetić (2019) pokazalo je da učenici imaju manji osjećaj sigurnosti u točnost odgovora sukladnog modelu proporcionalnosti u zadacima o neproporcionalnim odnosima u odnosu na osjećaj sigurnosti u točnost odgovora sukladnog modelu proporcionalnosti u zadacima o proporcionalnom odnosu. Osim toga,

zadatke o neproporcionalnim odnosima u kojima daju odgovor sukladan modelu proporcionalnosti, učenici procjenjuju težima od zadataka o proporcionalnom odnosu u kojima daju točan odgovor. Vrijeme rješavanja zadataka o proporcionalnom odnosu u kojima su učenici dali točan odgovor i zadataka o neproporcionalnim odnosima u kojima su dali odgovor sukladan modelu proporcionalnosti bilo je podjednako. Dakle, učenici detektiraju konflikt, određen preko metakognitivnih iskustava, između heuristika i analitičkog odgovora.

Može se zaključiti da su do sada provedena istraživanja pokazala da se spoznaje iz teorija dualnih procesa mogu primijeniti u matematičkom rezoniranju (tj. kod iluzije proporcionalnosti). Međutim, potrebno je istražiti i mogućnost primjene spoznaja iz meta-rezoniranja jer su istraživanja u tom području najčešće koristila zadatke s kojim se ljudi rijetko susreću u svojem svakodnevnom životu i tijekom školovanja (npr, kategorički silogizmi) (Ackerman, 2019). Budući da su matematičko i deduktivno rezoniranje pozitivno povezani (Morsanyi i sur., 2018), spoznaje iz meta-rezoniranja mogle bi se primijeniti na matematičko rezoniranje. Primjena meta-rezoniranja na zadatke iz područja matematičkog rezoniranja mogla bi doprinijeti integraciji spoznaja iz kognitivne psihologije i psihologije obrazovanja. Time bi se povećalo razumijevanje obrade informacija u matematičkom rezoniranju. Osim toga, većina istraživanja u okviru teorija dualnih procesa i meta-rezoniranja provedena je na studentima pa se postavlja pitanje mogu li se rezultati generalizirati i na drugu populaciju, poput srednjoškolaca. Konačno, matematičko rezoniranje predstavlja važan dio obrazovanja te se s matematičkim zadacima, za razilku od kategoričkih silogizama, ljudi u pravilu susreću tijekom školovanja.

Stoga smo u našem istraživanju prilikom ispitivanja iluzije proporcionalnosti željeli primijeniti metodologiju iz područja meta-rezoniranja. Točnije, pomoću paradigme dvostrukog odgovaranja željeli smo provjeriti jesu li i kod iluzije proporcionalnosti metakognitivna iskustva determinanta procesiranja Tipa 2. Pokazatelje procesiranja Tipa 2 definirali bismo sukladno prethodnim istraživanjima (npr. Thompson i sur., 2011): promjena odgovora, točnost odgovora i vrijeme odgovaranja prilikom drugog rješavanja zadataka. Osim toga, željeli smo provjeriti odnos između vremena odgovaranja, kao pokazatelja fluentnosti odgovora, i osjećaja točnosti i u situaciji s vremenskim pritiskom i u situaciji bez vremenskog pritiska, pri čemu bi vrijeme odgovaranja moglo predstavljati determinantu osjećaja točnosti. Željeli smo koristiti i skupine koje su odgovarale na zadatke samo jednom, i to bez vremenskog pritiska, kako bismo provjerili jesu li odgovori kod skupina s dvostrukim odgovaranjem u drugom odgovaranju prvenstveno pod utjecajem prvog odgovaranja ili refleksivnijeg pristupa rješavanju zadataka.

Smatrali smo važnim provjeriti i detektiraju li učenici konflikt između heuristika i normativnog odgovora. Istraživanje detekcije konflikta u kontekstu iluzije proporcionalnosti (Putarek i Vlahović-Štetić, 2019) ispitivalo je detekciju konflikta kod odgovaranja bez vremenskog pritiska ili ograničenja, ne i u situaciji s vremenskim pritiskom. Koristeći heuristike, poput zadatka osnovne razine, kao i Test kognitivne refleksivnosti, Bago i suradnici (Bago i De Neys, 2019; Bago i sur., 2018) pokazali su da sudionici i u situaciji s vremenskim ograničenjem detektiraju konflikt. Postavlja se pitanje, može li se detektirati konflikt između točnog odgovora i heuristika proporcionalnosti u zadacima iz područja iluzije proporcionalnosti i u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom, što do sada nije bilo istraživano? Budući da se pod vremenskim pritiskom mogu generirati točni odgovori (Bago i De Neys, 2017, 2019; Newman i sur., 2017), moguće je da će pod vremenskim pritiskom sudionici moći detektirati konflikt. Osim toga, iako vremenski pritisak smanjuje mogućnost inhibicije odgovora utemeljenog na heuristicima, on ne smanjuje mogućnost detekcije konflikta jer je detekcija konflikta kognitivno i vremenski nezahtjevna (Franssens i De Neys, 2009).

Spoznaje iz psihologije obrazovanja o matematičkim kompetencijama i adaptivnoj stručnosti mogu pomoći u osmišljavanju prikladnih intervencija za promjenu pristranog odgovaranja u matematičkom kontekstu. Sukladno tome, u našem smo istraživanju željeli primijeniti intervenciju i ispitati, možemo li pomoću te intervencije smanjiti sklonost iluziji proporcionalnosti. Budući da produktivna pogreška ima pozitivne učinke na matematičke kompetencije (npr. Kapur i Bielaczyc, 2012) i nije do sada istraživana u području iluzije proporcionalnosti, bilo bi korisno ispitati, može li se pomoću produktivne pogreške smanjiti iluzija proporcionalnosti. Stoga bi se u našem istraživanju intervencija temeljila na produktivnoj pogrešci. Za naše istraživanje i primjenu prethodno opisane paradigme dvostrukog odgovaranja bilo bi važno da istraživanje bude provedeno pomoću računala (tj. kako bismo mogli mjeriti vrijeme rješavanja zadataka). Posljedično bismo produktivnu pogrešku mogli, također, primijeniti pomoću računala. Time bismo mogli provjeriti djelovanje produktivne pogreške kada je ona primijenjena pomoću računala, što do sada nije istraživano. Pritom bi uobičajenu primjenu produktivne pogreške trebalo prilagoditi, vodeći računa o fazama produktivne pogreške koje su raniji istraživači definirali (npr. Kapur, 2016), kao i prema preporukama korištenja usporedbi (npr. Rittle-Johnson i Star, 2007, 2009) (prilagodba produktivne pogreške primjeni na računalima opisana je u Postupku).

U istraživanju bi bilo korisno usporediti, razlikuje li se učinkovitost primjene produktivne pogreške ovisno o objašnjenjima na koja se stavlja naglasak u fazi poučavanja.

Točnije, mogli bismo usporediti učinkovitost produktivne pogreške, u kojoj je naglasak na postupcima rješavanja zadataka (tj. naglasak na proceduralnom znanju), od učinkovitosti produktivne pogreške u kojoj je naglasak na razumijevanju pojmova koji su sadržani u zadacima (tj. naglasak na konceptualnom znanju). Pritom bi se postupci i prikazana objašnjenja zadataka temeljili na literaturi o iluziji proporcionalnosti (npr. De Bock i sur., 2007) i hrvatskim udžbenicima iz matematike. Važno bi bilo uključiti i kontrolnu grupu učenika koji ne bi bili izloženi produktivnoj pogrešci, s kojima bismo uspoređivali učinkovitost produktivne pogreške. Budući da se pokazuje da konceptualno znanje ima veći utjecaj na proceduralno znanje nego obrnuto te da je razumijevanje nekog gradiva ključno za uspješnost u određenom području (Hatano, 2003; Hatano i Oura, 2003; Matthews i Rittle-Johnson, 2009; Rittle-Johnson i Alibali, 1999; Rittle-Johnson i Schneider, 2015), pretpostavljamo da će produktivna pogreška biti najučinkovitija kada će učenici biti izloženi konceptualnom objašnjenju.

Učinkovitost produktivne pogreške provjerili bismo kroz rješavanje zadataka o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu koje bi uslijedilo odmah nakon intervencije (tj. produktivne pogreške). Svi zadaci mogli bi se definirati kao zadaci višestrukog izbora jer se prikazivanje zadataka o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu u obliku zadataka višestrukog izbora pokazalo prikladnim za ispitivanje iluzije proporcionalnosti (npr. Putarek i Vlahović-Štetić, 2019; Vlahović-Štetić i sur., 2010). Osim toga, takvi zadaci oduzimaju manje vremena od zadataka dosjećanja. Učenicima bi pritom bila ponuđena tri odgovora: 1) točan odgovor, 2) distraktor (kod zadataka o neproporcionalnom odnosu distraktor bi bio odgovor sukladan modelu proporcionalnosti), 3) odgovor „nijedno od ponuđenog“. Odgovor „nijedno od ponuđenoga“ trebao bi smanjiti pogađanje odgovora. Osim toga, u istraživanju Putarek i Vlahović-Štetić (2019), pokazalo se da odgovor „nijedno od ponuđenoga“ ima obilježja odgovora „ne znam“ korištenog u istraživanju Ackerman (2014). Točnije, učenici su imali manji osjećaj točnosti i sporije vrijeme odgovaranja kada su odabrali odgovor „nijedno od ponuđenoga“, u odnosu na ostale odabrane odgovore (jedino je osjećaj točnosti bio podjednak za odgovor „nijedno od ponuđenoga“ kao i za distraktore u zadacima o proporcionalnom odnosu). Međutim, korištenje odgovora „nijedno od ponuđenoga“ nije ispitano u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom pa bismo u ovom istraživanju usporedili FOR i vrijeme odgovaranja za odgovor „nijedno od ponuđenoga“ u odnosu na ostale odgovore.

Kako bi se odredilo početno proceduralno i konceptualno predznanje učenika u rješavanju zadataka o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu, bilo bi korisno primijeniti predtest otprilike tjedan dana prije primjene produktivne pogreške. Kako bi se provjerila učinkovitost produktivne pogreške s vremenskom odgodom od same primjene produktivne

pogreške, primijenili bismo posttest otprilike tjedan dana nakon rješavanja zadataka na računalima u kojem bismo ispitali proceduralno i konceptualno znanje učenika te transfer znanja. Mjere proceduralnog i konceptualnog znanja bile bi definirane na temelju prijašnjih istraživanja i pregleda istraživanja matematičkih kompetencija (Rittle-Johnson i Schneider, 2015). Točnije, proceduralno znanje procijenili bismo preko točnosti postupka i rješenja, a konceptualno znanje na temelju dvije implicitne mjere (usporedba zadataka i određivanje koje matematičke pojmove predstavljaju pojedini izrazi u zadacima). Zadaci kojima bismo ispitivali proceduralno znanje učenika bili su prikazani usporedno, jedan pored drugoga, kako bi se potaknula lakša usporedba među zadacima, sukladno preporukama Rittle-Johnson i suradnika (npr. Rittle-Johnson i Star, 2007, 2009). Transfer bismo procijenili preko točnosti rješavanja zadatka o neproporcionalnom odnosu, ali u ovom slučaju neproporcionalnom kubičnom odnosu s kakvim se nisu do tada susreli tijekom istraživanja. Bilo bi korišteno vremensko razdoblje od tjedan dana između točaka, kako bi proteklo dovoljno vremena da se izgube učinci recentnosti izloženosti predtestu ili intervenciji, a da isto tako ne protekne previše vremena, čime bi se povećala mogućnost da učenici tijekom redovne nastave matematike nauče neke postupke ili pojmove koji bi mogli djelovati na njihovo rješavanje zadataka u nekoj od točaka.

2. CILJ ISTRAŽIVANJA, PROBLEMI I HIPOTEZE

Cilj istraživanja bio je provjeriti postavke teorija dualnih procesa i meta-rezoniranja u području matematičkog rezoniranja o proporcionalnosti i neproporcionalnosti kod učenika drugog i trećeg razreda srednje škole te ispitati može li se produktivnom pogreškom smanjiti iluzija proporcionalnosti. U istraživanju smo se, dakle, usmjerili na poznavanje linearnih odnosa u užem smislu riječi (tj. proporcionalnost) te razlikovanje proporcionalnih i neproporcionalnih odnosa. Istraživački problemi i hipoteze bili su sljedeći:

Problem 1: Ispitati točnost i postupke rješavanja zadatka o proporcionalnom odnosu i neproporcionalnom odnosu te konceptualno znanje učenika o tim zadacima u predtestu.
Hipoteza 1: Učenici će biti uspješniji u rješavanju zadatka o proporcionalnom odnosu u odnosu na zadatak o neproporcionalnom odnosu. U zadatku o neproporcionalnom odnosu imat će više netočnih nego točnih odgovora te će od netočnih odgovora imati najviše odgovora koji su sukladni proporcionalnosti.

Problem 2: Ispitati primjenu produktivne pogreške kod iluzije proporcionalnosti.
Hipoteza 2: Učenici će u zadatku o neproporcionalnom odnosu imati više netočnih nego točnih odgovora te će od netočnih odgovora imati najviše odgovora koji su sukladni proporcionalnosti.

Problem 3: Ispitati razlikuje li se točnost rješavanja, metakognitivni osjećaj točnosti i vrijeme odgovaranja kod zadataka o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu u odgovaranju s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska, ovisno o intervenciji (tj. izloženosti produktivnoj pogrešci).
Hipoteza 3.1: Učenici u svim skupinama imat će podjednak broj točnih odgovora u zadacima o proporcionalnom odnosu. Broj točnih odgovora u zadacima o proporcionalnom odnosu u svim skupinama bit će podjednak u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska.
Hipoteza 3.2: Učenici u svim skupinama imat će podjednak broj točnih odgovora u zadacima o neproporcionalnom odnosu u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom. Prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska, u svim skupinama doći će do povećanja broja točnih odgovora u zadacima o neproporcionalnom odnosu, i to najviše kod učenika izloženih konceptualnoj uputi. Pritom učenici u skupinama s proceduralnom i konceptualnom uputom

neće više biti podložni iluziji proporcionalnosti i imat će više točnih odgovora od učenika u kontrolnoj skupini.

Hipoteza 3.3: Učenici će u svim skupinama imati izraženiji osjećaj točnosti kod odgovaranja bez vremenskog pritiska nego kod odgovaranja s vremenskim pritiskom te u zadacima o proporcionalnom odnosu nego u zadacima o neproporcionalnom odnosu.

Hipoteza 3.4: Učenici će u svim skupinama imati izraženiji osjećaj točnosti kada će brže odgovoriti na zadatak, i u situaciji s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska.

Problem 4: Ispitati metakognitivni osjećaj točnosti (FOR i FJC) i vrijeme odgovaranja prilikom odabira distraktora u zadacima o neproporcionalnom odnosu (tj. detekciju konflikta), kao i prilikom odabira ostalih ponuđenih odgovora u zadacima o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu, ovisno o intervenciji.

Hipoteza 4.1: U svim će skupinama FOR i FJC biti najniži i vrijeme odgovaranja najduže prilikom odabira odgovora „nijedno od ponuđenoga“, u odnosu na distraktore i točne odgovore kod zadataka o neproporcionalnom odnosu, te u odnosu na točne odgovore kod zadataka o proporcionalnom odnosu.

Hipoteza 4.2: U svim će skupinama FOR i FJC kod točnih odgovora u zadacima o proporcionalnom odnosu biti veći nego kod točnih odgovora u zadacima o neproporcionalnom odnosu i odgovora sukladnih proporcionalnosti u zadacima o neproporcionalnom odnosu.

Hipoteza 4.3: U svim će skupinama vrijeme odgovaranja, kada se daju točni odgovori u zadacima o neproporcionalnom odnosu biti najduže. Vrijeme odgovaranja kada se daju odgovori sukladni proporcionalnosti u zadacima o neproporcionalnom odnosu bit će kraće, a vrijeme odgovaranja kada se daju točni odgovori u zadacima o proporcionalnom odnosu bit će najkraće. Navedene razlike u vremenu odgovaranja bit će prisutne i u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom i u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska.

Problem 5: Ispitati razlike u točnosti rješavanja zadataka, vremenu odgovaranja i promjeni odgovora u situaciji rješavanja zadataka bez vremenskog pritiska, ovisno o metakognitivnom osjećaju točnosti nakon rješavanja zadataka s vremenskim pritiskom, te ovise li ti odnosi o intervenciji.

Hipoteza 5: Izraženiji osjećaj da je odgovor točan dovest će do manjeg broja promjena odgovora i bržeg odgovaranja na zadatke u situaciji bez vremenskog pritiska, i to u svim skupinama. Budući da se normativna točnost smatra manje pouzdanim pokazateljem procesiranja Tipa 2,

nismo pretpostavili smjer odnosa između FOR-a i normativne točnosti u situaciji bez vremenskog pritiska.

Problem 6: Ispitati točnost i postupke rješavanja zadatka o proporcionalnom odnosu i neproporcionalnim odnosima (kvadratnom i kubičnom) i konceptualno znanje učenika o tim zadacima u posttestu, kao i razlikuje li se rješavanje zadataka u posttestu ovisno o izloženosti intervenciji tijekom rješavanja zadataka na računalima.

Hipoteza 6.1: Učenici će biti uspješniji u rješavanju zadatka o proporcionalnom odnosu u odnosu na zadatke o neproporcionalnim odnosima te će u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu imati više točnih odgovora nego odgovora sukladnih proporcionalnosti i drugih netočnih odgovora. Učenici će u zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu imati više netočnih nego točnih odgovora te će od netočnih odgovora imati najviše onih odgovora koji su sukladni proporcionalnosti.

Hipoteza 6.2: Učenici izloženi intervenciji imat će više točnih odgovora u posttestu u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu i veći transfer (tj. uspjeh u zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu) u odnosu na učenike iz kontrolne skupine.

3. METODOLOGIJA

3.1. Sudionici

U istraživanju je sudjelovalo ukupno 1083 učenika, pri čemu je u sve tri točke (predtest, rješavanje zadataka na računalima i posttest) sudjelovalo 694 učenika. Ostali učenici sudjelovali su ili u jednoj točki ili u dvije točke mjerenja. Sudjelovalo je 349 mladića (32.3%) i 733 djevojaka (67.7%) iz četiriju zagrebačkih općih i jezičnih gimnazija. Iz drugih razreda bilo je 576 (53.2%) učenika, a iz trećih razreda bilo je 507 (46.8%) učenika. Prosječna dob učenika bila je 16.32 godine (*SD* = 0.65, raspon 15-18).

3.2. Instrumenti

3.2.1. Predtest i posttest

Učenici su u predtestu na papiru rješavali dva zadatka i trebali su napisati postupak kojim bi ih riješili. Podatke iz zadataka mogli su grafički predočiti.

Prvi zadatak odnosio se na opseg (odnos koji se temelji na modelu proporcionalnosti): „Uz rub manjeg stola, koji je kružnog oblika i promjera 3 metra, Marija stavlja ukrasne svijeće, na jednakoj međusobnoj udaljenosti. Da bi postavila svijeće po rubu cijelog stola, Mariji treba 20 svijeća. Koliko bi tih istih svijeća Mariji trebalo kako bi ih postavila oko ruba drugog stola koji ima promjer 6 metara? Svijeće su na rubu drugog stola postavljene na jednakoj međusobnoj udaljenosti kao i na prvom stolu.“. Drugi zadatak odnosio se na površinu (neproporcionalni kvadratni odnos): „Po cijeloj gornjoj plohi stola, koji je kružnog oblika i promjera 3 metra, Marija stavlja ukrasne svijeće, na jednakoj međusobnoj udaljenosti. Da bi postavila svijeće po cijeloj gornjoj plohi stola, Mariji treba 20 svijeća. Koliko bi tih istih svijeća Mariji trebalo kako bi ih postavila po cijeloj gornjoj plohi stola koji ima promjer 6 metara? Svijeće su po gornjoj plohi drugog stola postavljene na jednakoj međusobnoj udaljenosti kao i na prvom stolu.“

Odgovarali su i na dva pitanja o zadacima: 1. učenici su trebali napisati po čemu su zadaci slični (tj. zadatak o proporcionalnom i o neporoprocionalnom odnosu), a po čemu su i različiti; 2. učenici su trebali napisati koje matematičke pojmove predstavljaju pojedini dijelovi teksta u zadacima koje su rješavali (tj. što predstavljaju rub stola i cijela gornja ploha stola).

U posttestu učenici su rješavali ista dva zadatka koja su korištena u predtestu, kao i još jedan zadatak o neproporcionalnom kubičnom odnosu koji se odnosio na volumen: „U jednom

kupalištu nalaze se dva bazena i dolaskom ljeta potrebno ih je napuniti vodom. Da se napuni bazen oblika kocke potrebno je 150 litara vode. Koliko vode je potrebno da se napuni bazen, također, oblika kocke, ali s 3 puta duljim bridom?“. Kao i u predtestu, učenici su trebali napisati postupak kojim bi riješili zadatke te su mogli grafički predočiti podatke iz zadataka. Učenici su ponovno trebali odgovoriti na dva pitanja o zadacima (sličnosti i razlike između sva tri zadatka te koje matematičke pojmove predstavljaju pojedini dijelovi teksta [u posttestu su učenici trebali napisati što predstavljaju rub stola, cijela gornja ploha stola i napunjeni bazen vodom]).

3.2.2. Ispitivanje na računalima

Tijekom istraživanja učenici izloženi produktivnoj pogrešci najprije su rješavali zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu: „U jednom kupalištu nalaze se dva bazena koji imaju dno oblika kvadrata. Dno jednog bazena ima stranice duljine 4 metara, a za prekrivanje tog dna utrošeno je 250 pločica. Koliko je pločica, istih dimenzija kao za prvi bazen, potrebno da se prekrije dno drugog bazena koje ima stranice duljine 8 metara?“. Kao što je ranije opisano, učenici su zatim odgovarali na pitanja o zadatku i proučavali primjere. Učenici iz kontrolnih skupina nisu rješavali prethodno navedeni zadatak i proučavali primjere.

Svi su učenici rješavali 10 zadataka, pri čemu je bilo pet zadataka o proporcionalnom odnosu i pet zadataka o neproporcionalnom kvadratnom odnosu (prilog 1). Kod zadataka o proporcionalnom odnosu omjer između veličina potreban za dolazak do rješenja iznosio je k, a kod zadataka o neproporcionalnom odnosu k^2 (neproporcionalni kvadratni odnos). Zadaci su uključivali tekst zadatka i tri ponuđena odgovora. Pozicija točnog odgovora i distraktora mijenjala se po slučaju, a odgovor „nijedno od ponuđenoga“ uvijek je bio na posljednjem mjestu.

Primjer zadatka o proporcionalnom odnosu:
Da bi se postavila ograda oko igrališta oblika kvadrata kojemu je stranica dugačka 60 m potrebna su 3 dana. Koliko je dana potrebno za postavljanje ograde oko igrališta oblika kvadrata kojemu je stranica dugačka 120 m? Brzina kojom rade radnici jednaka je u oba slučaja.

1) 9 dana
2) 6 dana *(točan odgovor)*
3) nijedno od ponuđenog

Primjer zadatka o neproporcionalnom (kvadratnom) odnosu:

U voćnjaku koji je oblika kvadrata, sa stranicama duljine 5 metara, može rasti 9 stabala jabuke. Koliko stabala jabuke može rasti u voćnjaku oblika kvadrata kojemu su stranice dugačke 10 metara? Razmak između stabala jabuke jednak je u oba voćnjaka.

1) 36 stabala jabuke *(točan odgovor)*
2) 18 stabala jabuke
3) nijedno od ponuđenog

Nakon što bi riješili pojedini zadatak učenici su odgovarali na pitanje „Koliko si siguran/na da je tvoj odgovor točan?“ (tj. procjenjivali su FOR nakon odgovaranja s vremenskim pritiskom i FJC nakon odgovaranja bez vremenskog pritiska). Za odgovaranje na ovo pitanje učenici su koristili ljestvicu od sedam stupnjeva (1 – uopće nisam siguran/na do 7 – u potpunosti sam siguran/na).

Sociodemografski upitnik, akademski uspjeh i učenje

Od svih učenika tražili smo informacije o rodu, dobi i razredu koji pohađaju, i to nakon što su riješili sve zadatke. Osim toga, učenici su trebali navesti školski uspjeh na kraju prethodne školske godine, ocjenu iz matematike na kraju prethodne školske godine i predviđenu ocjenu iz matematike na kraju tekuće školske godine. Nadalje, učenike smo pitali koliko sati tjedno uče matematiku izvan nastave, koliko su zadovoljni uspjehom iz matematike te kada bi mogli sami odabrati školske predmete koje će učiti, bi li među njima bila matematika. Odgovori učenika na pitanja o akademskom uspjehu i učenju prikazani su u prilogu 2.

Motivacija i emocije za vrijeme rješavanja zadataka

Stupanj anksioznosti i dosade, kao i interesa za sudjelovanje u istraživanju ispitali smo pomoću sedam čestica (prilog 3). Ljestvica za odgovore imala je pet stupnjeva, od 1 – u potpunosti se ne slažem do 5 – u potpunosti se slažem.

3.3. Postupak

Istraživanje je provođeno od prosinca 2017. do svibnja 2018. godine. Budući da su učenici bili stariji od 14 godina, tražen je samo pristanak za sudjelovanje od strane učenika, a po učenicima je njihovim roditeljima poslano pismo s informacijama o istraživanju. Anonimnost je bila zajamčena, a učenici su upisivali šifru koja se sastojala od četiri zadnje znamenke njihovog broja mobitela i prva dva slova imena majke. Istraživanje je provodilo pet studenata završne godine studija psihologije i autorica ovog rada.

Učenici su sudjelovali u istraživanju kroz tri točke: predtest, rješavanje zadataka na računalima i posttest. Vremenski razmak između točaka mjerenja bio je sedam do deset dana. Tijekom predtesta i posttesta učenici su u svojim učionicama i razrednom odjeljenju individualno rješavali zadatke na papiru. Nije bilo vremenskog ograničenja, a trajanje i predtesta i posttesta bilo je između 15 i 30 minuta. Na početku predtesta učenicima je ukratko objašnjena svrha istraživanja te su na početku predtesta i posttesta izrečene upute o rješavanju zadataka i odgovaranju na pitanja.

Rješavanje zadataka na računalima provedeno je u računalnim učionicama u trajanju od oko 15 do 30 minuta. Učenicima su osnovne informacije o rješavanju zadataka (broj zadataka, važnost temeljitog čitanja uputa, dobivanje povratne informacije o broju točnih odgovora) bile pružene usmeno, a zatim su iste te osnovne informacije, kao i detaljnije upute bile prikazane na ekranu računala. Upute su se razlikovale ovisno o grupi u kojoj su se učenici nalazili i u koju su po slučaju bili raspoređeni (upute su prikazane u prilogu 4).

Učenici izloženi produktivnoj pogrešci u prvoj su fazi produktivne pogreške najprije riješili jedan zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu u kojem je omjer između veličina potreban za dolazak do rješenja iznosio k^2. Pritom su učenici trebali napisati jedan ili više postupaka kojima su došli do rješenja, a nakon što su upisali konačno rješenje, dobili su povratnu informaciju o točnosti rješenja i zatim napisali što misle zašto je njihovo rješenje (ne)točno, čime su bili potaknuti na razmišljanje o zadacima.

U drugoj fazi produktivne pogreške učenici su kroz dva primjera bili poučavani o razlici između proporcionalnosti i neproporcionalnosti. Primjeri bi bili prikazani usporedno, odnosno, jedan primjer zadatka bio je zadatak o proporcionalnom odnosu koji je bio prikazan s lijeve strane zaslona, a drugi primjer bio je zadatak o neproporcionalnom odnosu, koji je bio prikazan s desne strane zaslona. Zadaci su bili tekstualno gotovo identični, osim što se u zadatku o proporcionalnom odnosu radilo o opsegu, a u zadatku o neproporcionalnom odnosu o površini. Primjeri su bili prikazani na dva različita načina. Dio učenika dobio je u primjerima prikazan

postupak njihovog rješavanja. U postupku je bilo prikazano traženje koeficijenta k između veličina koje su bile navedene u tekstu te se kod zadatka o proporcionalnom odnosu koristio k, a kod zadatka o neproporcionalnom odnosu k^2 za dolazak do rješenja. Prikazivanjem postupka rješavanja zadataka nastojalo se potaknuti proceduralno znanje učenika. Drugi dio učenika dobio je prikazan isti tekst zadataka u primjerima, ali je ispod zadataka bilo njihovo povezivanje s matematičkim pojmovima (tj. opsegom i površinom), čime se nastojalo potaknuti konceptualno znanje učenika. Nakon toga, učenici koji su bili izloženi bilo proceduralnom bilo konceptualnom objašnjenju, trebali su odgovoriti što misle, nakon proučavanja prikazanih primjera, zašto su (ne)točno odgovorili na početni zadatak. Treći dio učenika nije dobio nikakvu dodatnu uputu o rješavanju zadataka (kontrolna skupina).

Nakon osnovne upute i dodatnih uputa (za skupine izložene produktivnoj pogrešci) uslijedilo je rješavanje pet zadataka o proporcionalnom odnosu i pet zadataka o neproporcionalnom odnosu. Svi su učenici rješavali sve zadatke, a zadaci su bili rotirani po slučaju. Učenici izloženi paradigmi dvostrukog odgovaranja, prvi su put trebali odgovoriti što brže na zadatak (učenicima je bilo rečeno da se mjeri vrijeme rješavanja i da riješe zadatak što brže, ali na zaslonu nije bilo odbrojavanja vremena ni izravno navedenog vremenskog ograničenja), a drugi su put mogli rješavati zadatak koliko dugo su mislili da je potrebno kako bi odgovor bio točan. Nakon prvog odgovaranja učenici su procijenili je li njihov odgovor bio prvi odgovor koji im je pao na pamet (odgovorili su s „da“ ili „ne“) te su procijenili metakognitivni osjećaj točnosti (FOR). Nakon procjene FOR-a uslijedilo je drugo rješavanje istog tog zadatka, a zatim su učenici procijenili FJC, odnosno, koliko su sigurni da je odgovor koji su dali prilikom drugog rješavanja zadatka točan, i to na skali od sedam stupnjeva (tj. kao i za procjenu FOR-a). Učenici koji su rješavali zadatke samo jednom dobili su uputu da zadatak mogu rješavati koliko dugo misle da je potrebno kako bi njihov odgovor bio točan.

Nakon što su riješili sve zadatke, učenicima je bio prikazan broj točno riješenih zadataka (kod učenika koji su odgovarali dva puta na zadatke prikazan je broj točnih rješenja i za prvo i za drugo rješavanje). Potom je uslijedio sociodemografski upitnik, čestice o akademskom uspjehu i učenju te na kraju čestice o motivaciji i emocijama za vrijeme rješavanja zadataka.

Učenici su pristupali svim materijalima na računalima preko poveznice http://ffzg.aquilonis.hr/. Računalni program koji se nalazi na navedenoj poveznici i pomoću kojeg je provedeno ovo istraživanje izrađen je u suradnji s tvrtkom Aquilonis d.o.o.

Nacrt istraživanja shematski je prikazan na slici 4.

PREDTEST

INTERVENCIJA NA RAČUNALIMA

		Produktivna pogreška		
		Bez produktivne pogreške (kontrolna skupina)	Proceduralna uputa	Konceptualna uputa
Broj odgovaranja	Dvostruko odgovaranje	skupina 1	skupina 2	skupina 3
	Samo odgovaranje bez vremenskog pritiska	skupina 4	skupina 5	skupina 6

POSTTEST

Slika 4. Shematski prikaz nacrta istraživanja s nezavisnim varijablama „produktivna pogreška“ i „broj odgovaranja“.
Napomena: Broj učenika u pojedinim skupinama u provedenom istraživanju - skupina 1: N = 154; skupina 2: N = 148; skupina 3: N = 150; skupina 4: N = 152; skupina 5: N = 15; skupina 6: N = 153.

4. REZULTATI

4.1. Iluzija proporcionalnosti u predtestu

U predtestu je sudjelovalo 950 učenika. Učenici su prilikom rješavanja zadataka o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu mogli dobiti najviše tri boda po zadatku. Uradak smo bodovali tako da su učenici dobili jedan bod za točan postupak, jedan bod za točno rješenje i jedan bod za slijeđenje modela proporcionalnosti u zadatku o proporcionalnom odnosu, odnosno modela neproporcionalnosti u zadatku o neproporcionalnom odnosu. Zadatak o proporcionalnom odnosu nije riješilo 26 učenika, a zadatak o neproporcionalnom odnosu 48 učenika. Učenici su ostvarili više bodova u zadatku o proporcionalnom odnosu (M = 2.62, SD = 0.70, 846 [93.0%] rješenja bilo je točno) nego u zadatku o neproporcionalnom odnosu (M = 0.96, SD = 1.28, 249 [29.2%] rješenja bilo je točno), $t(893) = 37.98$, $p < .001$. Od 605 netočnih rješenja, njih 540 (89.3%) bilo je sukladnih modelu proporcionalnosti. Budući da je u zadatku o neproporcionalnom odnosu bilo više netočnih nego točnih odgovora, a najčešći netočan odgovor bio je odgovor sukladan modelu proporcionalnosti, može se uočiti da je većina učenika bila podložna iluziji proporcionalnosti.

Zadatak o proporcionalnom odnosu učenici su najčešće (26.5% učenika) rješavali određivanjem koliko puta je drugi promjer veći od prvoga (tj. određivanje koeficijenta k) te množenje tog koeficijenta brojem svijeća (npr. 6 : 3 = 2 pa je 20 · 2 = 40). Jedan dio učenika eksplicitno je računao koeficijent k, a drugi dio učenika samo je napisao 20 · 2 ili 20 + 20. Drugi postupak, prema učestalosti (24.7% učenika), bio je rješavanje uz pomoć razmjera u koji su učenici uvrštavali veličinu promjera i broj svijeća (3 : 20 = 6 : x). Treća strategija, prema učestalosti (12.7% učenika), bila je navođenje rješenja bez postupka (učenici su samo napisali 40 svijeća). Četvrti postupak, prema učestalosti (12.4% učenika), bio je određivanje koeficijenta koji je predstavljao količnik između opsega prvog stola i broja svijeća te dijeljenje opsega drugog stola tim koeficijentom. Peto, razmjer opsega i broja svijeća računalo je 9.6% učenika, pri čemu je dio učenika koristio samo razmjer, a dio učenika najprije je odredio koeficijent k (koliko puta je opseg drugog stola veći od opsega prvog stola) i zatim pomnožio broj svijeća na prvom stolu tim koeficijentom. Šesto, učenici su naveli da je drugi stol duplo veći pa da je potrebno dvostruko više svijeća, što je predstavljalo netočno rezoniranje o zadatku (5.9% učenika). Ostali postupci korišteni su vrlo rijetko (u manje od 2% slučajeva), a među njima treba istaknuti postupak (1.4% učenika) u kojem su učenici podijelili promjer prvog stola

brojem svijeća i podijelili promjer drugog stola tim brojem, te postupak (1.3% učenika) u kojem su učenici oduzeli tri od šest i pomnožili razliku brojem svijeća (6 - 3 = 3, 20 · 3 = 60).

Kao i zadatak o proporcionalnom odnosu, tako i zadatak o neproporcionalnom odnosu učenici su najčešće rješavali određivanjem koliko je puta drugi promjer veći od prvoga (tj. određivanje koeficijenta *k*; 18.3% učenika). Drugi postupak, prema učestalosti, bio je računanje razmjera površina i broja svijeća (16.6% učenika; to je ujedno bio i najčešći postupak kod učenika koji su točno riješili ovaj zadatak, 58.2% tih učenika koristilo je ovaj postupak). Ponovno je jedan dio učenika računao samo razmjer, a drugi dio učenika najprije je odredio koeficijent *k* (koliko puta je površina drugog stola veća od površine prvog stola) i zatim pomnožio broj svijeća na prvom stolu tim koeficijentom. Treće, 15.8% učenika samo je navelo netočno rješenje sukladno modelu proporcionalnosti bez postupka, odnosno samo su napisali 40 (svijeća). Četvrti postupak, prema učestalosti (13.6% učenika), bio je računanje razmjera u koji su učenici uvrstili promjere i broj svijeća (npr. 3 : 20 = 6 : x). Peto, 9.8% učenika određivalo je koeficijent koji je predstavljao količnik između površine prvog stola i broja svijeća te dijeljenje površine drugog stola tim koeficijentom. U šestom postupku, prema učestalosti (6.4% učenika), učenici su naveli da je drugi stol dvostruko veći pa da je potrebno dvostruko više svijeća, što je predstavljalo netočno rezoniranje o zadatku. Ostala 52 različita postupka rijetko su korištena (u manje od 5% slučajeva), a među njima se može istaknuti računanje 20 · 2 = 40 pa 40 · 2 = 80, što je predstavljalo netočno rezoniranje o zadatku (0.6% učenika).

Učenici su koristili crteže kako bi predočili zadatke (zadatak o proporcionalnom odnosu: 55.1%; zadatak o neproporcionalnom odnosu: 39.9%), ali su crteži u pravilu bili samo skice kruga, bez crtanja svijeća, a ako su svijeće bile nacrtane, skice nisu bile precizne i samo su dočaravale nekoliko svijeća ili na rubu stola ili po cijeloj plohi stola.

Odgovore na pitanje o sličnostima i razlikama među zadacima svrstali smo u četiri kategorije, i te su kategorije bile određene zasebno za sličnosti i zasebno za razlike. Odgovor je mogao biti svrstan u jednu kategoriju kod određivanja sličnosti, ako se učenik pozivao samo na jednu sličnost, i isto tako u jednu kategoriju kod određivanja razlika, ako se učenik pozivao samo na jednu razliku. Međutim, odgovor je mogao biti svrstan i u više kategorija, ako je učenik navodio više informacija i objašnjenja po čemu su zadaci slični ili različiti. Stoga je broj kategoriziranih objašnjenja bio veći nego broj sudionika. Time je dobiveno ukupno 1072 objašnjenja kod određivanja sličnosti i 1136 kod određivanja razlika. Budući da je odgovore o sličnostima i razlikama bilo potrebno kategorizirati u navedene kategorije, 25% odgovora bilo je dvostruko kodirano od strane istraživača i još jednog kodera te je stupanj slaganja iznosio $\kappa = .99$ za sličnosti i $\kappa = .98$ za razlike.

U kategoriju 1 svrstana su objašnjenja u kojima su se učenici za određivanje sličnosti i razlika pozivali na informacije iz teksta (npr. 1. za sličnosti: zadaci su slični po tome što se spominje Marija, okrugli stol, svijeće; po tome kako su postavljeni; po tome što se traži da se izračuna broj svijeća); 2. za razlike: zadaci su različiti zato što se svijeće stavljaju po rubu stola ili po gornjoj plohi stola; različiti su jer su drugačije postavljeni). U kategoriji 1 bilo je 66.0% objašnjenja kod određivanja sličnosti i 60.9% kod određivanja razlika.

U kategoriji 2 nalazila su se objašnjenja u kojima su se učenici pozivali na postupak i rješenje. Učenici su se mogli pozivati na netočno rješenje zadatka ili pogrešan postupak te su takva objašnjenja uzeta u obzir jer je cilj ovog pitanja bio ispitati kako učenici razmišljaju o zadacima (za netočan postupak i/ili rješenje izgubili su bodove prilikom bodovanja rješavanja tih zadataka). Za sličnosti učenici su navodili, primjerice, da su zadaci slični prema postupku, rješenju, pristupu rješavanja, korištenju omjera ili formula. Za razlike učenici su navodili, primjerice, da su zadaci različiti prema postupku, formulama ili zato što se u prvom koristi promjer, a u drugom površina. U ovu kategoriju svrstano je 15.7% objašnjenja kod određivanja sličnosti među zadacima i 6.1% kod određivanja razlika.

Kategorija 3 uključivala je objašnjenja u kojima su se učenici pozivali na shvaćanje zadatka i matematičke pojmove u zadatku/zadacima. Primjeri objašnjenja iz kategorije 3 za sličnosti su sljedeći: zadaci su slični prema tipu matematičkog zadatka, logičkom zaključivanju, smislu, zahtijevaju poznavanje matematičkih pojmova ili elemenata. Primjeri objašnjenja iz kategorije 3, prema razlikama, su sljedeći: zadaci su različiti jer se prvi mogao i logički zaključiti; u prvom se zadatku radi o opsegu, a u drugom se zadatku radi o površini; prema matematičkim izrazima; prema broju dimenzija. U kategoriju 3 svrstano je 7.8% objašnjenja kod određivanja sličnosti među zadacima i 28.2% kod određivanja njihovih razlika.

Odgovori „ne znam“ i slučajevi u kojima nije bilo odgovora na ovo pitanje svrstani su u zasebnu kategoriju 4 (10.4% odgovora kod sličnosti i 4.8% kod razlika).

Može se uočiti da je dominantna kategorija bila kategorija 1 (pozivanje na tekst zadatka u određivanju sličnosti i razlika među zadacima). Kategorija 1 odnosila se na površna obilježja zadataka, dok su se kategorije 2 i 3 odnosile na dublju razinu obrade informacija prilikom odgovaranja na pitanje o sličnostima i razlikama između zadataka.

Usporedili smo i jesu li učenici koji su točno riješili zadatke davali objašnjenja iz dubljih razina obrade u odnosu na učenike koji su netočno riješili zadatke. Pritom je svaki odgovor bio svrstan samo u jednu kategoriju: površna ili dublja obrada informacija (ako je, primjerice, učenik imao objašnjenje i iz kategorije 1 i iz kategorije 3, bio je svrstan u dublju obradu informacija). Učenici koji su napisali točno rješenje kod zadatka o proporcionalnom odnosu

nisu se razlikovali od učenika koji su imali netočno rješenje prema broju odgovora u kategorijama površne i dublje obrade informacija, i kod opisivanja sličnosti ($\chi^2(1) = 1.86$, $p = .17$) i kod opisivanja razlika ($\chi^2(1) = 0.10$, $p = .76$).

Kod opisivanja sličnosti, učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom odnosu imali su podjednak broj odgovora u kategorijama površne i dublje obrade informacija kao i učenici koji su napisali netočno rješenje ($\chi^2(1) = 1.97$, $p = .16$). Međutim, kod opisivanja razlika, učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom odnosu navodili su više odgovora iz kategorije dublje obrade informacija (68.8% njihovih odgovora bilo je unutar kategorije dublje obrade informacija), u odnosu na učenike koji su netočno riješili zadatak, koji su navodili više odgovora iz kategorije površne obrade informacija (69.7% njihovih odgovora bilo je unutar kategorije površne obrade informacija) ($\chi^2(1) = 100.85$, $\varphi = .36$, $p < .001$).

U posljednjem pitanju učenici su trebali navesti koje matematičke pojmove predstavljaju informacije iz teksta, i to „rub stola“ i „gornja ploha stola“. Za zadatak o proporcionalnom odnosu priznati su odgovori „opseg“ ili „kružnica“, a za zadatak o neproporcionalnom odnosu „površina“ ili „krug“. Svaki od točno navedenih pojmova nosio je jedan bod pa je maksimalan broj bodova na ovo pitanje bio dva boda. Prosječan broj bodova na ovom pitanju bio je 1.81 ($SD = 0.49$). Od 887 učenika koji su odgovorili na ovo pitanje, 4.2% učenika navelo je oba pojma netočno (npr. napisali su kut i stranica; promjer i ploha), 85.6% učenika točno je navelo oba pojma, 2.5% učenika točno je navelo samo na koji se pojam odnosi rub stola, a 7.8% učenika točno je navelo samo na koji pojam se odnosi gornja ploha stola.

Broj bodova u zadatku navođenja pojmova nije se razlikovao ovisno o točnosti rješenja u zadatku o proporcionalnom odnosu ($\chi^2(2) = 0.50$, $p = .78$). Od učenika koji su netočno riješili zadatak o proporcionalnom odnosu, 78.1% njih točno je navelo traženi pojam za rub stola. Broj bodova u zadatku navođenja pojmova razlikovao se ovisno o točnosti rješenja u zadatku o neproporcionalnom odnosu ($\chi^2(2) = 11.78$ $p = .003$, *Cramer's V* = .12). Točnije, učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom odnosu naveli su u pravilu oba točna pojma (92.6% učenika koji su točno riješili zadatak), dok je nešto manje učenika koji su netočno riješili zadatak navelo oba točna odgovora (83.7% učenika koji su netočno riješili zadatak). Od učenika koji su netočno riješili zadatak o neproporcionalnom odnosu, 85.7% njih točno je navelo traženi pojam za gornju plohu stola.

Broj bodova u zadatku navođenja pojmova nije se razlikovao ovisno o površnom ili dubljem odgovoru kod navođenja sličnosti u zadatku uspoređivanja ($\chi^2(2) = 0.35$, $p = .84$), ali se razlikovao kod navođenja razlika ($\chi^2(2) = 27.88$, $p < .001$, *Cramer's V* = .18). Točnije, 93.8% učenika koji su naveli odgovor dublje razine procesiranja navelo je oba točna pojma, dok je

nešto manje učenika koji su naveli odgovor površne razine procesiranja navelo oba točna odgovora (81.3% učenika).

4.2. Iluzija proporcionalnosti i metakognitivno rezoniranje u ispitivanju na računalima

4.2.1. Produktivna pogreška

Od 298 učenika koji su bili izloženi paradigmi dvostrukog odgovaranja, kao i intervenciji (tj. produktivnoj pogrešci), njih 92 (30.9%) točno je riješilo zadatak o neproporcionalnom odnosu koji im je bio prezentiran na samom početku. Od 206 učenika koji su netočno riješili zadatak, 166 (80.6%) učenika odgovorilo je sukladno modelu proporcionalnosti. Dakle, može se uočiti da je većina učenika bila podložna iluziji proporcionalnosti u ovom zadatku.

Odgovaranje na početni zadatak u prosjeku je trajalo 206.87 sekundi (SD = 129.45, raspon 7.40-915.70), odnosno 3.45 minuta, pri čemu je duže vrijeme odgovaranja bilo kod učenika koji su točno riješili zadatak nego kod onih koji su netočno riješili zadatak ($M_{točno}$ = 4.38 minuta, $SD_{točno}$ = 2.70; $M_{netočno}$ = 3.03 minute, $SD_{netočno}$ = 1.71; t-test za transformirane[3] varijable: $t(296) = 4.69$, $p < .001$, $d = 0.58$).

Iako su učenici dobili uputu da zadatak riješe na što više načina, to je učinilo samo 30 učenika. Stoga je broj prikazanih postupaka iznosio 234 kod učenika koji su netočno riješili zadatak (194 kod učenika koji su koristili model proporcionalnosti) i 94 kod učenika koji su točno riješili zadatak. Učenici koji su točno riješili zadatak najčešće su u postupku računali razmjer površina bazena i broja pločica (57.4% postupaka), pri čemu je dio učenika računao razmjer, a dio učenika je napisao samo 4 · 250, a dio učenika najprije je računao omjer površina i odredio time koeficijent k (koliko puta je površina drugog bazena veća od površine prvog bazena) te su množili broj pločica prvog bazena tim koeficijentom. Drugi postupak prema učestalosti bilo je računanje koeficijenta koji je predstavljao količnik između površine prvog bazena i broja pločica te dijeljenje površine drugog bazena s tim koeficijentom (33.0% postupaka).

[3] U statističkim analizama vrijeme odgovaranja transformirano je logaritmiranjem po bazi 10 zbog odstupanja distribucija varijabli od normalne distribucije.

Učenici koji su odgovorili netočno, u skladu s modelom proporcionalnosti, najčešće su računali koeficijent *k* (koliko puta je stranica drugog bazena veća od stranice prvog bazena) i pomnožili taj broj brojem pločica prvog bazena (40% postupaka). Zatim, računali su razmjer stranica bazena i broja pločica (24.2% postupaka). Nadalje, učenici su navodili da je bazen dvostruko veći pa je potrebno i dvostruko više pločica (12.9% postupaka) te su samo napisali da treba 500 pločica (bez postupka) (9.8% odgovora). Nadalje, postupak u kojem su učenici dijelili broj pločica duljinom stranice manjeg bazena i taj količnik pomnožili duljinom stranice većeg bazena ($250 : 4 = 62.5$ pa $62.5 \cdot 8$) korišten je u 5.7% slučajeva. Kod učenika koji su netočno riješili zadatak, ali su odgovorili nekim rješenjem koje se nije odnosilo na model proporcionalnosti, najviše (10% postupaka) bilo je $250 \cdot 8 = 2000$, zatim 7.5% postupaka $250 : 4 = 62.5$, $62.5 \cdot 2 = 125$ te u istom postotku postupak $16 : 250 = 0.064$, $0.064 \cdot 64 = 4096$ pločica.

Učenici su nakon rješavanja zadatka odgovarali na pitanje što misle zašto su (ne)točno riješili zadatak, zatim su čitali riješene primjere i ponovno odgovarali na pitanje što nakon čitanja primjera misle, zašto su (ne)točno riješili zadatak. Odgovori učenika na pitanje što misle, zašto su (ne)točno riješili zadatak kategorizirani su u sedam kategorija, za oba odgovaranja (tj. i prije i nakon čitanja riješenih primjera), te je odgovor mogao biti svrstan u jednu ili više kategorija, ovisno o broju objašnjenja koje su učenici naveli. Time su dobivena ukupno 322 objašnjenja prije nego što su učenici vidjeli riješene primjere (220 kod učenika koji su netočno riješili zadatak i 102 kod onih koji su točno riješili zadatak) i 310 objašnjenja nakon što su vidjeli riješene primjere (216 kod učenika koji su netočno riješili zadatak i 94 kod onih koji su točno riješili zadatak). Objašnjenja u pojedinim kategorijama bila su slična za odgovaranje prije i nakon čitanja primjera pa će biti prikazana zajedno, a broj objašnjenja u pojedinim kategorijama prikazan je u tablici 1. Ponovno je 25% objašnjenja bilo dvostruko kodirano od strane istraživača i još jednog kodera te je stupanj slaganja iznosio $\kappa = 1.00$ za objašnjenje prije čitanja primjera i $\kappa = 0.87$ nakon čitanja primjera.

Prva kategorija nazvana je „usmjerenost na postupak“ i odnosila se na objašnjenja u kojima su učenici navodili da su (ne)točno riješili zadatak zbog nekog aspekta njihovog postupka. Primjerice, učenici koji su netočno riješili zadatak napisali bi da je to zato što su pomnožili s dva, nisu trebali množiti, krivo su napisali omjer, zbog netočnog dijeljenja, krivo su zbrojili. Objašnjenja u toj kategoriji nisu bila egzaktni pokazatelji da učenici znaju u čemu su pogriješili, već su predstavljala općenite opise postupka ili nagađanje što je u postupku pogrešno. Neka objašnjenja bila su pogrešna, primjerice: „nisam koristila formulu za opseg kvadrata“. Učenici koji su točno riješili zadatak napisali bi da je to zato što se trebala računati površina, dobro su postavili zadatak, koristili su dobru formulu.

Tablica 1
Frekvencija (i postotak) objašnjenja u pojedinim kategorijama za pitanje zašto je učenik/ca (ne)točno riješio/la zadatak.

	Prije čitanja primjera		Nakon čitanja primjera	
Kategorije	Netočno rješenje	Točno rješenje	Netočno rješenje	Točno rješenje
1	65 (29.5%)	54 (52.9%)	51 (23.6%)	23 (24.5%)
2	41 (18.6%)	17 (16.7%)	15 (6.9%)	33 (35.1%)
3	49 (22.2%)	18 (17.6%)	46 (21.3%)	14 (14.9%)
4	12 (5.5%)	5 (4.9%)	5 (2.3%)	4 (4.3%)
5	29 (13.2%)	0	53 (24.5%)	2 (2.1%)
6	4 (1.8%)	/	14 (6.5%)	/
7	20 (9.1%)	8 (7.8%)	32 (14.8%)	17 (18.1%)

Napomena: 1 = usmjerenost na postupak, 2 = usmjerenost na shvaćanje zadatka, 3 = individualni pristup i stil rješavanja, 4 = osobni afinitet prema matematici i slika o sebi, 5 = konceptualna promjena, 6 = kognitivna rigidnost, 7 = ne znam i bez odgovora

U drugu kategoriju, nazvanu „usmjerenost na shvaćanje zadatka“, uvrštena su objašnjenja u kojima su se učenici pozivali na interpretaciju zadatka i povezivanje s matematičkim pojmovima. Pritom su učenici, koji su netočno riješili zadatak, navodili objašnjenja koja su ukazivala na pogrešno razumijevanje zadatka (npr. „pločice koje se koriste za prekrivanje drugog bazena drugih dimenzija“; „shvatila sam da za duplo veći bazen treba duplo vise pločica“; „možda zato što nisam uzela u obzir volumen nego samo stranice“). Osim toga, učenici bi naveli općenito objašnjenje, poput: „krivo sam shvatio zadatak“ ili „nisam shvatio zadatak“ ili „nisam razumjela koja je razlika između postupaka“ (nakon čitanja primjera). Učenici koji su točno riješili zadatak navodili su objašnjenja, poput: „pločice na dnu bazena predstavljaju površinu kvadrata“, „jednak je broj pločica po kvadratnom metru u oba bazena jer su pločice jednake“.

Treća kategorija, „individualni pristup i stil rješavanja“, uključivala je objašnjenja u kojima su se učenici referirali na način rješavanja zadatka. Primjerice, učenici koji su netočno riješili zadatak navodili su da je njihovo rješenje pogrešno jer su rješavali zadatak vizualno, a ne matematički, jer su rješavali zadatak logički, a ne matematički, jer su bili brzopleti, jer nisu dovoljno dobro pročitali zadatak, jer su improvizirali. Učenici koji su točno riješili zadatak

napisali su da je to zato što su dobro razmislili, jer su koristili matematiku, jer su vizualno predočili ili jer su uzeli dovoljno vremena.

U sljedećoj kategoriji nalazila su se objašnjenja u kojima su učenici navodili da su netočno riješili zadatak jer, primjerice, ne znaju matematiku, ne ide im matematika, ne vole matematiku ili ne znaju zadatke riječima, dok su učenici koji su točno riješili zadatak navodili da znaju matematiku ili jer su pametni. Stoga je ova kategorija nazvana „osobni afinitet prema matematici i slika o sebi“.

Peta kategorija, nazvana „promjena odgovora u točno rješenje (konceptualna promjena)“, uključivala je kod učenika koji su netočno riješili zadatak objašnjenja poput „trebala sam pomnožiti sa 4“, „trebala sam izračunati površinu manjeg i većeg bazena“, a kod učenika koji su točno riješili zadatak objašnjenja poput, „zato što sam provjerio rješavanjem na drugi način iako mi je prvotni odgovor bio 500“ ili „prva pomisao bila mi je da će biti potrebno dvostruko više pločica, ali to je bilo prije shvaćanja da se treba pokriti cijela površina dna bazena, ne samo jedna strana“.

Šesta kategorija predstavljala je „ostajanje pri početnom rješenju (kognitivna rigidnost)“ (npr. „druga površina je duplo veća pa treba duplo vise pločica te ne vidim zašto je to rješenje krivo“, „nisam sigurna da je moje prvotno rješenje uistinu netočno“, „došlo je do pogreške u sustavu, točno mi je rješenje“). Ova kategorija uključivala je objašnjenja samo učenika koji su netočno riješili zadatak

Sedma kategorija uključivala je odgovore „ne znam“ i odbijanje davanja odgovora (npr. učenik bi napisao „aaaaaa“).

Na temelju tablice 1 može se uočiti da je nakon čitanja primjera broj objašnjenja u kategoriji konceptualne promjene kod učenika koji su netočno odgovorili na zadatak porastao u odnosu na situaciju prije čitanja primjera. Međutim, porastao je i broj objašnjenja u kategoriji kognitivne rigidnosti. U tim kategorijama prevladavala su objašnjenja učenika koji su zadatak riješili sukladno modelu proporcionalnosti (prije čitanja primjera u kategoriji konceptualne promjene tih učenika bilo je 89.7%, a u kategoriji kognitivne rigidnosti 100%; nakon čitanja primjera u kategoriji konceptualne promjene tih učenika bilo je 86.8%, a u kategoriji kognitivne rigidnosti 71.4%) u odnosu na učenike koji su odgovorili nekim drugim netočnim odgovorom. Broj objašnjenja u kategoriji konceptualne promjene bio je podjednak neovisno o primjeru koji su učenici čitali (tj. proceduralna ili konceptualna uputa) ($\chi^2(1) = .98$, $p = .32$).

Vrijeme objašnjavanja zašto je rješenje (ne)točno prije čitanja primjera bilo je duže kod učenika koji su objašnjavali zašto su točno riješili zadatak nego učenika koji su objašnjavali

zašto su netočno riješili zadatak ($M_{točno}$ = 1.37 minuta, $SD_{točno}$ = 0.85; $M_{netočno}$ = 1.12 minuta, $SD_{netočno}$ = 0.75; *t*-test za logaritamski transformirane varijable: $t(296) = 2.66$, $p = .01$, $d = 0.33$).

Primjere zadataka učenici su čitali u prosjeku 1.18 minuta (*SD* = 1.15) i nije bilo razlike u vremenu čitanja između učenika koji su točno i netočno riješili zadatak (*t*-test za logaritamski transformirane varijable, $t(296) = 1.24$, $p = .22$).

4.2.2. Iluzija proporcionalnosti

4.2.2.1. Preliminarne analize

Konfirmatorna faktorska analiza zadataka korištenih u ispitivanju na računalima

Za provjeru faktorske strukture 10 zadataka (pet zadataka o proporcionalnom odnosu i pet zadataka o neproporcionalnom odnosu) korištenih za ispitivanje na računalima provedena je konfirmatorna faktorska analiza. Zadaci o proporcionalnom odnosu evociraju odgovor sukladan heuristiku proporcionalnosti koji je kongruentan s normativnom točnošću, a zadaci o neproporcionalnom odnosu evociraju odgovor sukladan heuristiku proporcionalnosti koji je nekongruentan s normativnom točnošću. Drugim riječima, kod zadataka o neproporcionalnom odnosu procesiranje Tipa 1 generira netočan odgovor, a da bi se uočilo da je on netočan, procesiranje Tipa 2 treba dubinski obraditi informacije i inhibirati automatski odgovor. Stoga je pretpostavljeno da su zadaci saturirani dvama faktorima: 1) faktor koji zahtijeva minimalno uključivanje procesiranja Tipa 2 (faktor „proporcionalnost“), 2) faktor koji zahtijeva veći angažman procesiranja Tipa 2 koji može rezultirati inhibicijom automatskog odgovora, ili kod neuspjelog angažmana procesiranja Tipa 2 rezultira iluzijom proporcionalnosti (faktor „neproporcionalnost“).

Druga pretpostavka bila je da je svih 10 zadataka saturirano jednim faktorom, pri čemu bi veća razvijenost ovog faktora, odnosno veći ukupni rezultat, odražavala i veći angažman procesiranja Tipa 2 te manju podložnost iluziji proporcionalnosti. Međutim, kod jednofaktorskog rješenja ne bismo mogli odrediti označava li manja razvijenost ovog faktora, odnosno manji ukupni rezultat, podložnost iluziji proporcionalnosti, a time i manji angažman procesiranja Tipa 2, ili neznanje vezano uz rješavanje problemskih zadataka ovog tipa, što ne mora nužno ukazivati na manji angažman procesiranja Tipa 2. Iz tih razloga pretpostavili smo da bi dvofaktorsko rješenje bolje opisivalo naše podatke, odnosno rješavanje dviju vrsta zadataka. Specificirali smo stoga dva modela, jedan za dvofaktorsko i jedan za jednofaktorsko rješenje.

Proveli smo konfirmatornu faktorsku analizu u kojoj smo kao manifestne varijable ili indikatore koristili točnost odgovora na svakom od 10 zadataka. Pritom smo manifestne varijable kodirali kao binarne varijable, odnosno odgovori su kodirani ili kao točni ili kao netočni. Najprije smo provjerili faktorsku strukturu zadataka kod odgovaranja s vremenskim pritiskom (korišten je samo poduzorak učenika koji su imali dvostruko odgovaranje), a zatim kod odgovaranja bez vremenskog pritiska (korišten je cijeli uzorak). Za obje konfirmatorne analize korištena je metoda procjene za kategorijalne varijable, *robust weighted least squares* (WLSMV). Ova metoda procjene određuje pokazatelje slaganja na temelju tetrahoričkih koeficijenata korelacije kada se radi o binarnim varijablama. Kod tetrahoričkih koeficijenata određuje se povezanost između binarnih varijabli na temelju procjene povezanosti kontinuiranih varijabli koje se manifestiraju u binarnim odgovorima (Brown, 2006). Tetrahorički koeficijenti korelacija za odgovaranjes vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska prikazani su u prilogu 5.

Konfirmatorna faktorska analiza s binarnim manifestnim varijablama ekvivalentna je dvoparametarskom modelu u okviru teorije odgovora na zadatke (Brown, 2006; Kamata i Bauer, 2008; MacIntosh i Hashim, 2003; Moustaki, Jöreskog i Mavridis, 2004). Faktorske saturacije dobivene konfirmatornom faktorskom analizom analogne su indeksima diskriminativnosti dobivenima u okviru teorije odgovora na zadatke, dok su pragovi (engl. *threshold*) analogni indeksima težine. Dakle, saturacije označavaju koliko varijance u manifestnoj varijabli objašnjava latentna varijabla. Što su saturacije veće, može se zaključiti da će osoba, koja točno odgovori na zadatak, vjerojatnije imati i veću prisutnost latentne varijable. Pragovi označavaju razinu latentne varijable na skali od $-\infty$ do $+\infty$ koja je potrebna da bi osoba točno odgovorila na zadatak.

U provedbi konfirmatorne faktorske analize korišten je statistički paket R, verzija 3.6.0. U interpretaciji slaganja modela i podataka korišteno je nekoliko pokazatelja slaganja: χ^2 test (statistička neznačajnost pokazuje dobro slaganje) (Brown, 2006); (b) χ^2/df (dobro slaganje pokazuju vrijednosti manje od 5) (West, Taylor i Wu, 2012); (c) comparative fit index (CFI) i Tucker-Lewis index (TLI) (dobro slaganje pokazuju vrijednosti veće od .95) (Hu i Bentler, 1999); (d) *root mean square error of approximation* (RMSEA) (dobro slaganje pokazuju vrijednosti manje od .06) (Hu i Bentler, 1999); (e) *standardized root mean square residual* (SRMR) (dobro slaganje pokazuju vrijednosti manje od .08) (West i sur., 2012), ali SRMR nije pouzdan pokazatelj slaganja kod binarnih zadataka pa njegove vrijednosti nije preporučljivo interpretirati (Brown, 2006).

Mardia test je pokazao da distribucija rezultata nije normalna (odgovaranje s vremenskim pritiskom – spljoštenost: 22.00, $p < .001$, kurtičnost: 137.72, $p < .001$; odgovaranje bez vremenskog pritiska – spljoštenost: 22.21, $p < .001$, kurtičnost: 147.78, $p < .001$). Svi su modeli bili identificirani, a stupnjevi slobode navedeni su u legendi tablice 2.

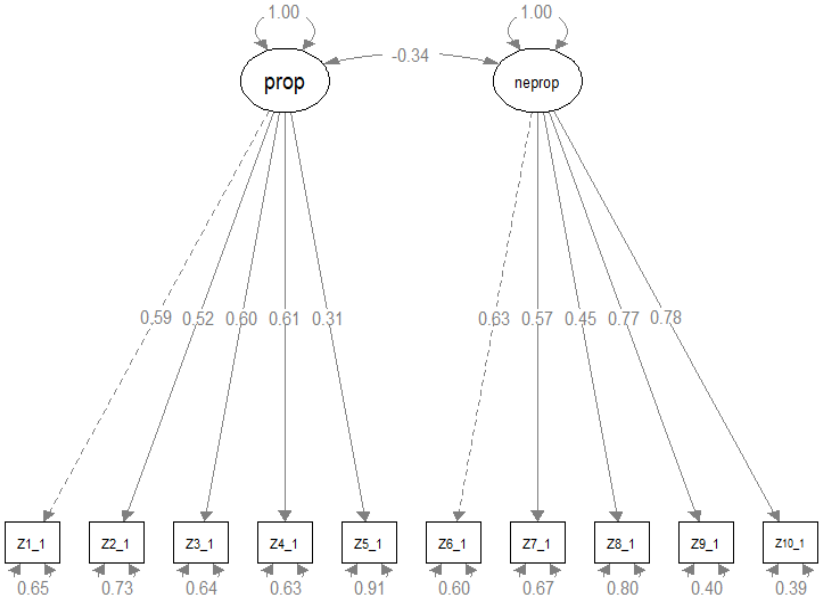
Konfirmatornu faktorsku analizu proveli smo za cijeli uzorak i zasebno za poduzorke (tj. eksperimentalne/kontrolne skupine). Budući da se radilo o malom broju sudionika za provedbu konfirmatorne faktorske analize na poduzorcima, podcijenjeni su pokazatelji slaganja i parametri (Myers, Ahn i Jin, 2011; Wolf, Harrington, Clark i Miller, 2013). Rezultate konfirmatorne faktorske analize stoga smo prikazali u tablici 2 za cijeli uzorak, i to za dvofaktorsko i jednofaktorsko rješenje kod odgovaranja s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska, a rezultati za poduzorke nalaze se u prilogu 6.

Tablica 2
Pokazatelji slaganja dvofaktorskog i jednofaktorskog rješenja kod odgovaranja s vremenskim i bez vremenskog pritiska, kao i testiranje razlika između ova dva modela.

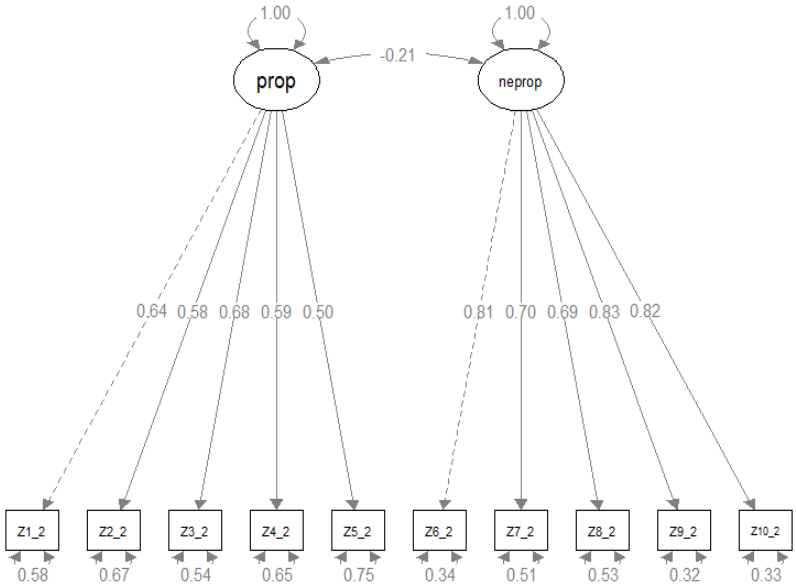
	χ^2	χ^2/df	CFI	TLI	RMSEA (90% CI)	SRMR
Jedan faktor						
Vremenski pritisak	57.07^{**}	1.68	.95	.93	.04 (.02, .06)	.09
Bez vremenskog pritiska	139.11^{***}	4.09	.95	.94	.06 (.05, .07)	.09
Dva faktora						
Vremenski pritisak	124.26^{***}	3.55	.80	.78	.08 (.06, .09)	.13
Bez vremenskog pritiska	412.91^{***}	11.80	.83	.78	.11 (.10, .12)	.16
Razlika između modela s jednim faktorom i dva faktora						
Vremenski pritisak	$\Delta\chi^2$	36^{***}	133.34^{***}			
Bez vremenskog pritiska	Δdf	1	1			

Napomena: 1 = odgovaranje s vremenskim pritiskom (N = 450, df [dva faktora] = 34, df ([jedan faktor] = 35); 2 = odgovaranje bez vremenskog pritiska (N = 905, df [dva faktora] = 34, df [jedan faktor] = 35)
$^{**}p < .01$, $^{***}p \leq .001$

Dvofaktorski model imao je bolje slaganje s podacima nego jednofaktorski model za odgovaranje s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska, što je potvrđeno i testiranjem razlike χ^2. Faktorske saturacije prikazane su na slikama 5a i 5b.



a) Odgovaranje s vremenskim pritiskom



b) Odgovaranje bez vremenskog pritiska

Slika 5. Faktorske saturacije zadataka faktorom proporcionalnost i faktorom neproporcionalnost kod odgovaranja s vremenskim pritiskom (a) i kod odgovaranja bez vremenskog pritiska (b).

Saturacije zadataka faktorom proporcionalnost, kao i saturacije faktorom neproporcionalnost, veće su od .30 za odgovaranje s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska, što se smatra interpretabilnim saturacijama (vidi sliku 5a i 5b) (Brown, 2006). Nekoliko saturacija faktorom, neproporcionalnost veće je od .70, što se smatra visokim saturacijama i ukazuje na visoku konvergentnu valjanost faktora (Kline, 2011). Ovi faktori stoga imaju zadovoljavajuću konvergentnu valjanost, iako ona nije visoka. Kao što je prethodno spomenuto, veće saturacije zadataka faktorom mogu se interpretirati kao pokazatelji diskriminativnosti zadataka. Kod zadataka saturiranih faktorom neproporcionalnost može se uočiti da je ta povezanost veća nego kod zadataka saturiranih faktorom proporcionalnost.

Kod odgovaranja s vremenskim pritiskom, indeksi težine (tj. pragovi) iznosili su za zadatke o proporcionalnom odnosu -0.74, -0.90, -1.06, -0.83, -1.01, a za zadatke o neproporcionalnom odnosu 0.52, 0.73, 0.53, 0.48, 0.62. Kod odgovaranja bez vremenskog pritiska indeksi težine (tj. pragovi) iznosili su za zadatke o proporcionalnom odnosu -0.84, -0.87, -1.21, -0.87, -1.09, a za zadatke o neproporcionalnom odnosu 0.19, 0.59, 0.52, 0.27, 0.30. Može se zaključiti da je za zadatke o neproporcionalnom odnosu bila potrebna veća razvijenost latentne varijable da bi ih učenici točno riješili nego za zadatke o proporcionalnom odnosu.

Korelacija između faktora je niska i negativna, što to pokazuje da faktori mjere različite i odvojene procese prilikom rješavanja zadataka.

Pouzdanost unutarnje konzistencije određena je formulom KR-20 te je za odgovaranje s vremenskim pritiskom iznosila .69 za zadatke o proporcionalnom odnosu i .78 za zadatke o neproporcionalnom odnosu. Za odgovaranje bez vremenskog pritiska pouzdanost unutarnje konzistencije iznosila je .72 za zadatke o proporcionalnom odnosu i .86 za zadatke o neproporcionalnom odnosu.

Usporedbom modela za zadatke o proporcionalnom odnosu za odgovaranje s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska pokazalo se da model u kojem su pretpostavljena dva faktora (jedan za odgovaranje s vremenskim pritiskom i jedan za odgovaranje bez vremenskog pritiska) podjednako dobro opisuje podatke kao i model u kojem su svi zadaci saturirani jednim faktorom ($\Delta\chi^2 = 2.78$, $p = .10$, $\Delta df = 1$). Jednaki obrazac pokazuje se i kod zadataka o neproporcionalnom odnosu ($\Delta\chi^2 = 0.82$, $p = .37$, $\Delta df = 1$). Budući da odgovaranje s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska predstavljaju dva teorijski različita načina rješavanja zadataka, u nastavku smo razmatrali zasebno faktore za zadatke o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska.

Zaključno, konfirmatornom faktorskom analizom pokazalo se da su zadaci objašnjeni dvama odvojenim faktorima pa smo u daljnjim obradama zadatke o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu razmatrali zasebno, odnosno kao dvije odvojene skupine zadataka.

Vrijeme odgovaranja

Prije obrade podataka iz ispitivanja na računalima provjerili smo jesu li učenici slijedili uputu da prilikom prvog odgovaranja na zadatak odgovore što brže i prvim odgovorom koji im padne na pamet. Na zadatke o proporcionalnom odnosu učenici su u 91.91% slučajeva odgovorili rješenjem koje im je prvo palo na pamet, a na zadatke o neproporcionalnom odnosu u 91.94% slučajeva. Dakle, na gotovo sve zadatke učenici su odgovorili prvim rješenjem koje im je palo na pamet, pri čemu nije bilo razlika između eksperimentalnih skupina ($F(2,447) = 1.63$, $p = .20$).

Jesu li učenici slijedili upute, dodatno smo provjerili preko bihevioralne mjere operacionalizirane vremenom odgovaranja, koje se sastojalo i od vremena čitanja i od vremena rješavanja. Učenici koji su naveli da su riješili zadatke o proporcionalnom odnosu prvim odgovorom koji im je pao na pamet nisu se razlikovali u vremenu odgovaranja na zadatke o proporcionalnom odnosu pod vremenskim pritiskom u odnosu na učenike koji su naveli da nisu riješili zadatke prvim odgovorom koji im je pao na pamet, $t < 1$. Učenici koji su naveli da su riješili zadatke o neproporcionalnom odnosu prvim odgovorom koji im je pao na pamet sporije su rješavali zadatke o neproporcionalnom odnosu pod vremenskim pritiskom u odnosu na učenike koji su naveli da nisu riješili zadatke prvim odgovorom koji im je pao na pamet, $t(448) = 3.05$, $p = .002$, $d = 0.36$. Međutim, iako ni za učenike koji su naveli da su odgovarali prvim odgovorom koji im je pao na pamet ne možemo sa sigurnošću odrediti jesu li to uistinu i učinili, za učenike koji su naveli da nisu odgovorili prvim odgovorom koji im je pao na pamet možemo pretpostaviti da nisu slijedili uputu da ne promišljaju o zadacima kada ih prvi puta rješavaju pa smo te učenike izbacili iz daljnjih analiza.

Vrijeme odgovaranja bilo je duže kod prvog rješavanja zadataka (proporcionalni: $M = 21.00$ sekundi, $SD = 10.19$; neproporcionalni: $M = 22.55$ sekundi, $SD = 11.15$) nego kod drugog rješavanja (proporcionalni: $M = 19.46$ sekundi, $SD = 17.98$; neproporcionalni: $M = 20.44$ sekundi, $SD = 17.61$), i to kod svih skupina, $F(1,446) = 183.57$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .29$ (u analizu su uvrštene logaritamski transformirane varijable). Osim toga, odgovaranje na zadatke o neproporcionalnom odnosu bilo je duže nego odgovaranje na zadatke o proporcionalnom

odnosu, $F(1,446) = 9.56$, $p = .002$, $\eta_p^2 = .02$. Dakle, prema bihevioralnoj mjeri rezultati su pokazali da učenici nisu slijedili uputu i odgovarali prvi puta brzo, a drugi puta sporije. Treba uzeti u obzir da kod vremena odgovaranja govorimo o kumulativnom vremenu čitanja i rješavanja, što znači da su možda prvi puta učenici pažljivo pročitali zadatak, pa je vrijeme kod prvog odgovaranja u većoj mjeri odraz vremena čitanja, dok su kod drugog odgovaranja već bili upoznati s tekstom zadatka pa je izmjereno vrijeme odraz vremena rješavanja. Sukladno tome, kada smo usporedili vrijeme odgovaranja učenika koji su bili izloženi dvostrukom odgovoru s vremenom odgovaranja učenika koji su predstavljali kontrolne skupine i odgovarali samo jednom na zadatke, pokazalo se da je vrijeme odgovaranja bilo duže kod učenika koji su se prvi puta susreli sa zadatkom, a dobili su uputu da rješavaju zadatke bez vremenskog pritiska, u odnosu na učenike koji su se isto prvi puta susreli sa zadatkom, a dobili su uputu da rješavaju zadatke s vremenskim pritiskom, i kod zadataka s proporcionalnim odnosom, $F(5,899) = 35.89$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .17$, i kod zadataka s neproporcionalnim odnosom, $F(5,899) = 42.73$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .19$. Međutim, budući da ne možemo sa sigurnošću tvrditi da je prvo rješavanje rezultat automatskog procesiranja, u nastavku ćemo koristiti izraz „rješavanje zadataka s vremenskim pritiskom/odgovaranje s vremenskim pritiskom“, a ne „automatsko rješavanje zadataka“.

4.2.2.2. Izraženost iluzije proporcionalnosti ovisno o izloženosti produktivnoj pogrešci

Deskriptivni podaci za broj točnih odgovora, distraktora i odgovora „nijedno od ponuđenoga“, kod odgovaranja s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska, s obzirom na vrstu zadatka i intervenciju prikazani su tablici 3. Osim toga, u tablici 3 prikazani su i rezultati analize varijance za ponovljena mjerenja s Greenhouse-Geisser korekcijom kojom smo provjerili postoje li razlike u broju odabranih točnih odgovora, distraktora i odgovora „nijedno od ponuđenoga“.

U tablici 3 može se uočiti da postoje razlike u broju odabranih točnih odgovora, distraktora i odgovora „nijedno od ponuđenog“. Kod zadataka o proporcionalnom odnosu, post-hoc analiza uz Bonferronijevu korekciju pokazala je da učenici odabiru više točnih odgovora nego distraktora ili odgovora „nijedno od ponuđenoga“. Između broja odabranih distraktora i odgovora „nijedno od ponuđenoga“ nije bilo razlike, osim u situaciji s vremenskim pritiskom u kontrolnoj skupini i skupini s proceduralnom uputom ($\Delta M > 0.29$), te na razini cijelog poduzorka učenika koji su imali dvostruko odgovaranje na zadatke, ($\Delta M > 0.23$) u kojima su učenici odabrali više distraktora nego odgovora „nijedno od ponuđenoga“.

Tablica 3

Prosječan broj odabranih točnih odgovora, distraktora i odgovora „nijedno od ponuđenoga“ kod odgovaranja s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska, ovisno o intervenciji.

		Zadaci o proporcionalnom odnosu						Zadaci o neproporcionalnom odnosu					
		točan odgovor	distraktor	„nijedno od ponuđenoga“				točan odgovor	distraktor	„nijedno od ponuđenoga“			
	N	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*F*	*df*	η_p^2	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*F*	*df*	η_p^2
Vremenski pritisak													
Kontrolna skupina	122	4.27 (0.93)	0.51 (0.80)	0.22 (0.44)	740.38***	1.34, 162.24	.86	1.05 (1.36)	3.69 (1.48)	0.26 (0.68)	174.32***	1.33, 161.33	.59
Proceduralna uputa	107	4.00 (1.19)	0.67 (0.93)	0.33 (0.77)	305.81***	1.60, 169.49	.74	1.47 (1.40)	3.12 (1.59)	0.41 (0.73)	91.21***	1.33, 140.46	.43
Konceptualna uputa	103	4.17 (1.12)	0.44 (0.70)	0.40 (0.77)	418.04***	1.46, 148.90	.80	1.64 (1.47)	2.86 (1.62)	0.51 (0.78)	52.93***	1.38, 140.42	.34
Sve tri skupine zajedno	332	4.15 (1.08)	0.54 (0.82)	0.31 (0.67)	1354.20***	1.53, 505.98	.80	1.37 (1.43)	3.25 (1.60)	0.39 (0.73)	274.58***	1.33, 441.45	.45
Bez vremenskog pritiska													
Kontrolna skupina	122	4.37 (1.02)	0.36 (0.72)	0.27 (0.60)	695.35***	1.41, 170.99	.85	1.18 (1.59)	3.48 (1.75)	0.34 (0.65)	106.89***	1.22, 147.42	.47
Proceduralna uputa	107	4.02 (1.28)	0.44 (0.83)	0.54 (0.93)	277.91***	1.54, 162.79	.72	1.95 (1.73)	2.51 (1.77)	0.53 (0.89)	32.32***	1.40, 148.49	.23
Konceptualna uputa	103	3.98 (1.21)	0.53 (0.78)	0.49 (0.88)	289.68***	1.53, 155.98	.74	2.14 (1.68)	2.30 (1.68)	0.57 (0.89)	29.10***	1.44, 146.47	.22
Sve tri skupine zajedno	332	4.14 (1.18)	0.44 (0.77)	0.42 (0.82)	1142.01***	1.51, 498.19	.78	1.73 (1.71)	2.80 (1.80)	0.48 (0.82)	131.28***	1.33, 439.28	.28

***$p < .001$

Nadalje, kod zadataka o neproporcionalnom odnosu, post-hoc analiza uz Bonferronijevu korekciju pokazala je da učenici u situaciji s vremenskim pritiskom odabiru više distraktora (tj. odgovora sukladnih modelu proporcionalnosti) nego točnih odgovora ili odgovora „nijedno od ponuđenoga“, ali više točnih odgovora nego odgovora „nijedno od ponuđenoga“. U situaciji bez vremenskog pritiska učenici su u skupinama s proceduralnom i konceptualnom uputom odabrali podjednak broj točnih odgovora i odgovora sukladnih proporcionalnosti ($\Delta M < 0.56$) te su odabrali najmanje odgovora „nijedno od ponuđenoga“, dok su u kontrolnoj skupini odabrali najviše distraktora, zatim točnih odgovora i najmanje odgovora „nijedno od ponuđenoga“. Dakle, kada su učenici odgovarali bez vremenskog pritiska, iluzija proporcionalnosti nije bila izražena kod skupina koje su bile izložene produktivnoj pogrešci, dok je u ostalim situacijama iluzija proporcionalnosti bila prisutna.

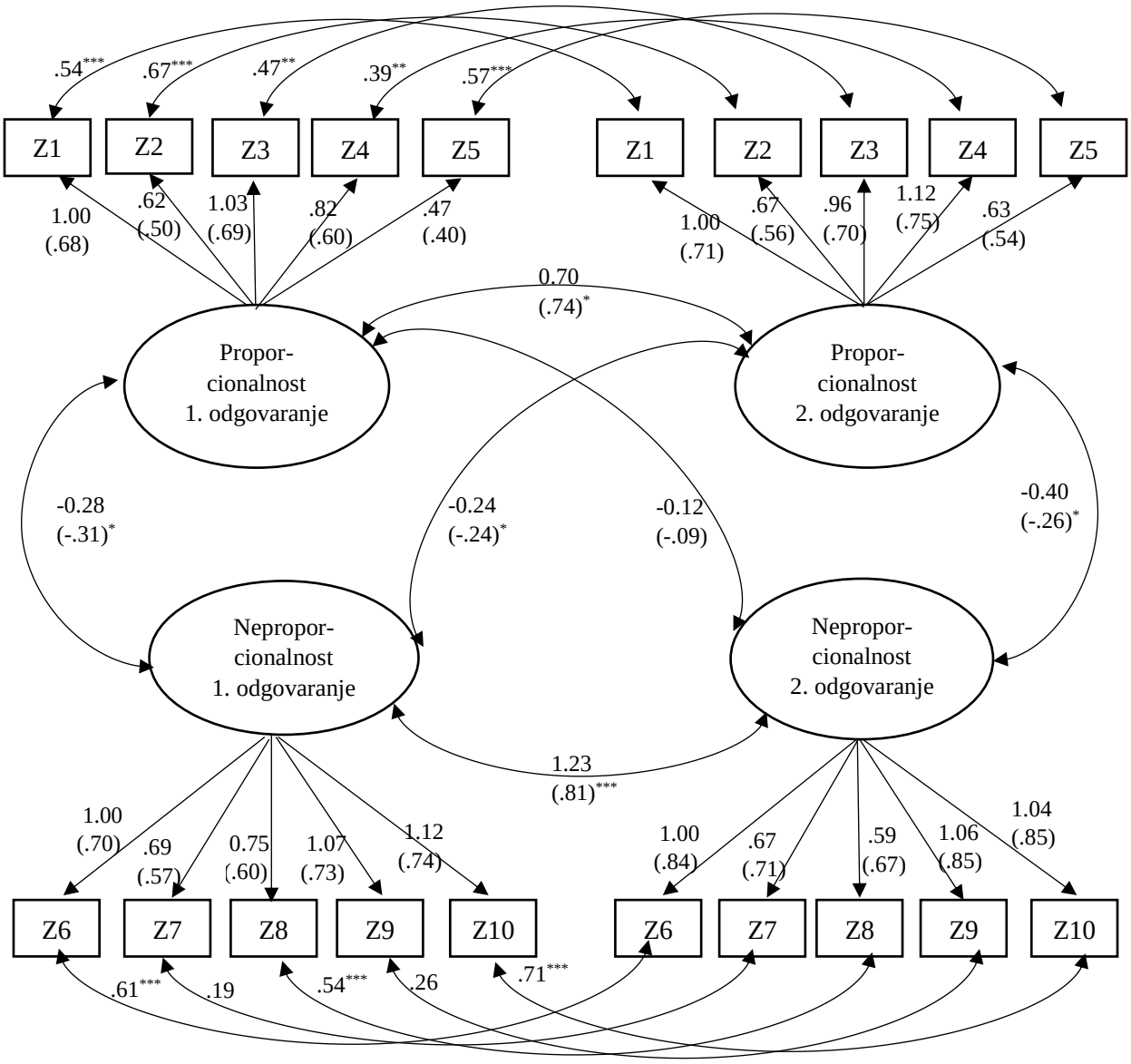
Značajnost razlika u broju točnih odgovora u zadacima o proporcionalnom i zadacima o neproporcionalnom odnosu, ovisno o točki odgovaranja i intervenciji, provjerili smo pomoću strukturalnog modeliranja. Za razliku od tradicionalnih pristupa, poput analize varijance ili multiple regresije, kod strukturalnog modeliranja u obzir se uzima pogreška mjerenja prilikom procjene parametara (Kline, 2012). Ovaj pristup uključuje definiranje latentne varijable (npr. latentni faktor proporcionalnost) koja objašnjava pojedine manifestne varijable (npr. bruto rezultat pojedinih zadataka). Kada se procjenjuju parametri latentne varijable (npr. njezina varijanca) kontrolira se pogreška mjerenja koja je sadržana u manifestnim varijablama. U strukturalnom modeliranju mogu se procijeniti parametri koji se odnose na manifestne i latentne varijable, a istovremeno se mogu provjeriti i odnosi među latentnim varijablama, što rezultira simultanim odgovaranjem na veći broj istraživačkih problema (Hoyle, 2012).

U preliminarnoj analizi prikazana je provjera mjernog dijela modela (konfirmatorna faktorska analiza). Točnije, pet zadataka o proporcionalnom odnosu (pet manifestnih varijabli) bilo je saturirano faktorom proporcionalnost, a pet zadataka o neproporcionalnom odnosu (pet manifestnih varijabli) faktorom neproporcionalnost. Pritom su zasebno definirani faktori za prvo i drugo odgovaranje na zadatke. U strukturalnom dijelu modela definirani su odnosi između faktora, pri čemu su pretpostavljene korelacije među njima.

Najprije smo provjerili razlike u latentnim aritmetičkim sredinama, i to tako da su pragovi prvih manifestnih varijabli kod sva četiri faktora bili su fiksirani, čime su odsječci (engl. *intercepti*), odnosno aritmetičke sredine, faktora mogli biti procijenjeni) (Kline, 2011). Najbolje pristajanje podacima imao je model ($\chi^2(155) = 241.48$, $p < .001$, CFI = .95, TLI = .94, RMSEA = .041, 90% CI RMSEA [.031, .051], SRMR = .103) u kojem su odsječci za dva faktora proporcionalnost bili isti, a odsječci za dva faktora neproporcionalnost različiti međusobno, ali

i u odnosu na parametre kod faktora proporcionalnost (npr. ovaj model nije se razlikovao od modela u kojem su parametri bili slobodno procijenjeni, $\Delta\chi^2 = 1.44$, $p = .23$, $\Delta df = 1$, dok je model u kojem su odsječci za faktore proporcionalnost bili fiksirani istim parametrom i odsječci za faktore neproporcionalnost bili fiksirani istim parametrom imao lošije pristajanje od modela u kojem su odsječci za faktor neproporcionalnost slobodno procijenjeni, $\Delta\chi^2 = 9.53$, $p = .002$, $\Delta df = 1$). Parametri u modelu prikazani su na slici 6.

Drugim riječima, rezultati su pokazali sljedeće: 1) latentne aritmetičke sredine jednake su kod faktora proporcionalnost (tj. podjednaka je točnost rješavanja zadataka o proporcionalnom odnosu i kod prvog i kod drugog rješavanja); 2) latentne aritmetičke sredine različite su između faktora neproporcionalnost (tj. točnost rješavanja zadataka o neproporcionalnom odnosu razlikuje se između prvog i drugog rješavanja). Veličine odsječaka, iskazane na skali latentne varijable, pokazuju da je točnost rješavanja kod faktora proporcionalnost u prvom rješavanju iznosila 1.10 (standardizirano: 1.12, $SE = 0.14$, $p < .001$), a u drugom rješavanju 1.10 (standardizirano: 1.03, $SE = 0.14$, $p < .001$), dok je točnost rješavanja kod faktora neproporcionalnost iznosila kod prvog rješavanja -0.73 (standardizirano: -0.75, $SE = 0.10$, $p < .001$) i kod drugog rješavanja -0.36 (standardizirano: -0.25, $SE = 0.11$, $p = .001$).



Slika 6. Grafički prikaz odnosa između latentnih varijabli proporcionalnost i neproporcionalnost te manifestnih varijabli koje su objašnjene latentnih varijablama.
Napomena: Izvan zagrada navedene su nestandardizirane vrijednosti, a u zagradama standardizirane. Ako su ove vrijednosti jednake, navedena je samo jedna vrijednost parametra. $*p < .05$, $**p < .01$, $***p < .001$

Razlike između eksperimentalnih skupina u latentnim aritmetičkim sredinama broja točnih odgovora provjerene su multigrupnom analizom. Prije provedbe multigrupne analize provjerena je invarijantnost, i to najprije konfiguralna invarijantnost, zatim metrijska i skalarna te na kraju striktna invarijantnost. Ako se potvrdi skalarna invarijantnost, možemo zaključiti da razlike u aritmetičkim sredinama između grupa na manifestnoj razini odražavaju i razlike na latentnoj razini, te je skalarna invarijantnost preduvjet za uspoređivanje manifestnih aritmetičkih sredina grupa (Putnick i Bornstein, 2016; Vandenberg i Lance, 2000).

Konfiguralna invarijantnost odnosi se na provjeru jednakosti faktorske strukture u podskupinama (Brown, 2006). Slaba faktorijalna ili metrijska invarijantnost je viša razina invarijantnosti od konfiguralne i odnosi se na jednakost faktorskih saturacija za podskupine. Jednakost odsječaka pojedinih manifestnih varijabli predstavlja jaku faktorijalnu ili skalarnu invarijantnost, koja podrazumijeva da se razlike između grupa u manifestnoj varijabli mogu pripisati razlikama između grupa u latentnoj varijabli, a ne drugim izvorima razlika koji se ne odnose na ispitivani konstrukt (Millsap i Olivera-Aguilar, 2012). Drugim riječima, ako postoji skalarna invarijantnost, pojedinci koji imaju jednak rezultat na latentnoj varijabli postižu i jednak rezultat na manifestnim varijablama, neovisno o pripadnosti grupi (Milfont i Fischer, 2010).

Kod kategorijalnih varijabli provjerava se jednakost pragova i preporuka je da se kod binarnih varijabli u istom koraku provjeri jednakost saturacija i jednakost pragova (Muthén i Asparouhov, 2002; Wu i Estabrook, 2016). Striktna faktorijalna invarijantnost odnosi se na jednakost reziduala manifestnih varijabli, odnosno ovaj oblik invarijantnosti pokazuje da su specifična varijanca čestice/zadatka (varijanca koja nije dijeljena s latentnim faktorom) i pogreška mjerenja jednaki između grupa (Putnick i Bornstein, 2016). Postoje različite prakse prilikom uspoređivanja modela invarijantnosti, ali jedan je od najčešćih postupaka uspoređivanje restriktivnijeg modela s manje restriktivnim modelom (Vandenberg i Lance, 2000). Osim toga, kod kategorijalnih indikatora preporuča se korištenje theta parametrizacije (Millsap i Yun-Tein, 2004).

Kod usporedbe modela uzeli smo u obzir $\Delta\chi^2$, kao i ΔCFI i ΔRMSEA. $\Delta\chi^2$ osjetljiv je na veličinu uzorka pa kod velikih uzoraka čak i male razlike u χ^2 mogu biti statistički značajne (Cheung i Rensvold, 2002). Stoga se preporučuje korištenje drugih pokazatelja slaganja, pri čemu se najčešće koristi razlika u CFI, koja ne bi trebala biti veća od .01 da bismo mogli zaključiti da nema razlike između modela (Hirschfeld i von Brachel, 2014; Meade, Johnson i Braddy, 2008). Osim ΔCFI koristi se i ΔRMSEA koji ne bi trebao biti veći od .015 (Chen, 2007).

U multigrupnoj analizi korišten je model prikazan na slici 6, a bile su uspoređivane tri skupine (kontrolna skupina, skupina s proceduralnom uputom i skupina s konceptualnom uputom). Model skalarne invarijantnosti (zajedno je provjerena invarijantnost saturacija i pragova) ($\chi^2(530) = 601.25$, $p = .017$, CFI = .954, TLI = .950, RMSEA = .035, 90% CI RMSEA [.016, .048], SRMR = .166) imao je jednako dobro pristajanje podacima kao i model konfiguralne invarijantnosti ($\chi^2(466) = 551.37$, $p = .004$, CFI = .944, TLI = .932, RMSEA = .041, 90% CI RMSEA [.025, .054], SRMR = .160) ($\Delta\chi^2 = 59.13$, $p = .65$, $\Delta df = 64$, ΔCFI =

.010, ΔRMSEA = .006). Model striktne invarijantnosti imao je jednako dobro pristajanje podacima kao i model skalarne invarijantnosti ($\chi^2(509) = 577.22$, $p = .019$, CFI = .956, TLI = .950, RMSEA = .035, 90% CI RMSEA [.015, .049], SRMR = .166) ($\Delta\chi^2 = 28.26$, $p = .13$, $\Delta df = 21$, ΔCFI = .002, ΔRMSEA = .000). Stoga smo u multigrupnoj analizi mogli provjeriti razlike u latentnim aritmetičkim sredinama u točnosti rješavanja zadataka o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu prilikom rješavanja s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska. Najprije smo odredili pokazatelje pristajanja modela podacima, u kojem su svi odsječci za sve grupe bili slobodno procijenjeni: $\chi^2(511) = 582.22$, $p = .016$, CFI = .954, TLI = .948, RMSEA = .036, 90% CI RMSEA [.017, .049], SRMR = .166. Zatim smo fiksirali pojedine odsječke i uspoređivali pokazatelje slaganja s modelom u kojem su svi odsječci bili slobodno procijenjeni. Model u kojem pokazatelji slaganja nisu bili lošiji od modela u kojem su svi odsječci bili slobodno procijenjeni zadržan je kao konačan model koji je pokazao između kojih odsječaka postoje razlike, a koje se mogu smatrati jednakima.

Prema konačnom modelu ($\chi^2(516) = 588.54$, $p = .015$, CFI = .953, TLI = .948, RMSEA = .036, 90% CI RMSEA [.017, .049], SRMR = .166), rezultati u sve tri skupine ne razlikuju se na faktoru proporcionalnost u situaciji s vremenskim pritiskom, odnosno broj točnih odgovora u zadacima o proporcionalnom odnosu u situaciji s vremenskim pritiskom bio je podjednak u sve tri skupine (kontrolna skupina: 1.104 [standardizirano 1.724], *SE* = 0.092; skupina s proceduralnom uputom: 1.104 [standardizirano 1.258], *SE* = 0.092; skupina s konceptualnom uputom = 1.104 [standardizirano 1.153], *SE* = 0.092; sve $p < .001$). Na faktoru proporcionalnost, u situaciji bez vremenskog pritiska, broj točnih odgovora bio je, također, jednak u sve tri skupine (kontrolna skupina: 1.104 [standardizirano 1.324], *SE* = 0.092; skupina s proceduralnom uputom: 1.104 [standardizirano 1.172], *SE* = 0.092; skupina s konceptualnom uputom = 1.104 [standardizirano 0.992], *SE* = 0.092; sve $p < .001$). Broj točnih odgovora u zadacima o proporcionalnim odnosima bio je jednak u situaciji s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska za sve tri skupine.

U zadacima o neproporcionalnom odnosu, broj točnih odgovora u situaciji bez vremenskog pritiska bio je veći nego u situaciji s vremenskim pritiskom za skupine izložene intervenciji, dok je za učenike u kontrolnoj skupini bio podjednak. Učenici u kontrolnoj skupini imali su manje točnih odgovora od učenika u skupinama s proceduralnom i konceptualnom uputom, a između skupina izloženih proceduralnoj i konceptualnoj uputi nije bilo razlika u broju točnih odgovora, i u situaciji s vremenskim pritiskom (kontrolna skupina: -0.994 [standardizirano -1.040], *SE* = 0.147; skupina s proceduralnom uputom: -0.507 [standardizirano -0.687, *SE* = 0.105; skupina s konceptualnom uputom: -0.507 [standardizirano -0.756], *SE* =

0.105; sve $p < .001$), i u situaciji bez vremenskog pritiska (kontrolna skupina: -0.994 [standardizirano -0.651], $SE = 0.147$, $p < .001$; skupina s proceduralnom uputom: -0.031 [standardizirano -0.031], $SE = 0.107$, $p = .772$; skupina s konceptualnom uputom = -0.031 [standardizirano -0.028], SE = 0.107, $p = .772$).

Dodatno smo provjerili razlike između skupina ovisno o točnosti rješavanja zadataka u predtestu te početnog zadatka u okviru produktivne pogreške[4]. Učenici u kontrolnoj skupini, skupini izloženoj proceduralnoj uputi i skupini izloženoj konceptualnoj uputi nisu se razlikovali u uspješnosti rješavanja zadatka o proporcionalnom odnosu ($F(2,292) = 0.41$, $p = 67$) i zadatka o neproporcionalnom odnosu ($F(2,286) = 1.48$, $p = .23$) u predtestu.

Nadalje, provjerili smo odnos između točnosti rješavanja početnog zadatka u okviru produktivne pogreške i točnosti rješavanja zadataka o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu prilikom odgovaranja s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska. Učenike izložene produktivnoj pogreški podijelili smo u ukupno četiri skupine, ovisno o tome jesu li točno ili netočno riješili zadatak. U statističkoj obradi koristili smo mješovitu analizu varijance jer je broj učenika u tako dobivenim skupinama bio oko 40, zbog čega modeli nisu konvergirali.

Kod zadataka o proporcionalnom odnosu ($F(4,327) = 3.81$, $p = .005$, $\eta_p^2 = .05$), kontrolna skupina bila je jednako uspješna u rješavanju zadataka kao i učenici izloženi konceptualnoj uputi, neovisno o tome jesu li početni zadatak točno ili netočno riješili, a u odnosu na učenike izložene proceduralnoj uputi bili su podjednako uspješni jedino ako su učenici iz te skupine točno riješili početni zadatak (u slučaju da nisu točno riješili početni zadatak, učenici u kontrolnoj skupini bili su uspješniji od učenika izloženih proceduralnoj uputi).

Kod zadataka o neproporcionalnom odnosu ($F(4,327) = 9.33$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .10$), učenici u kontrolnoj skupini bili su manje uspješni u odnosu na učenike izložene proceduralnoj uputi koji su točno riješili početni zadatak, ali se nisu razlikovali u uspješnosti rješavanja zadataka o neproporcionalnom odnosu u usporedbi s učenicima izloženima proceduralnoj uputi koji su netočno riješili početni zadatak. Učenici u skupini s konceptualnom uputom koji su netočno riješili početni zadatak bili su manje uspješni od učenika s konceptualnom uputom koji su točno riješili početni zadatak, te su učenici s konceptualnom uputom (neovisno o točnosti rješavanja

[4] Učenici iz pojedinih skupina nisu se razlikovali u prosječnom školskom uspjehu ($F(2,324) = 1.22$, $p = .30$) i ostvarenoj ocjeni iz matematike ($F(2,325) = 1.11$, $p = .33$). Učenici s većom ocjenom iz matematike imali su više bodova u zadatku o neproporcionalnom odnosu u predtestu ($r(285) = .26$, $p < .001$), točno su riješili više zadataka o proporcionalnom odnosu kod odgovaranja s vremenskim pritiskom ($r(325) = .11$, $p = .045$) i bez vremenskog pritiska ($r(325) = .13$, $p = .02$) te zadataka o neproporcionalnom odnosu kod odgovaranja s vremenskim pritiskom ($r(325) = .21$, $p < .001$) i bez vremenskog pritiska ($r(325) = .23$, $p < .001$). Bili su uspješniji u rješavanju zadataka u posttestu: zadatka o proporcionalnom odnosu ($r(272) = .13$, $p = .04$), zadatka o neproporcionalnom kvadratnom odnosu ($r(271) = .24$, $p < .001$) i zadatka o neproporcionalnom kubičnom odnosu ($r(264) = .25$, $p < .001$).

početnog zadatka) bili uspješniji od učenika u kontrolnoj skupini. Konačno, učenici koji su bili izloženi proceduralnoj uputi i netočno su riješili početni zadatak bili manje uspješni od učenika koji su bili izloženi proceduralnoj i konceptualnoj uputi i točno su riješili početni zadatak.

Vrijeme odgovaranja bilo je u niskoj pozitivnoj ili nultoj korelaciji s brojem točno riješenih zadataka o proporcionalnom odnosu (kontrolna skupina u situaciji vremenskog pritiska, $r(120) = .28$, $p = .002$, i bez vremenskog pritiska, $r(122) = .04$, $p = .69$; skupina s proceduralnom uputom u situaciji vremenskog pritiska, $r(105) = .19$, $p = .05$, i bez vremenskog pritiska, $r(105) = .07$, $p = .49$; skupina s konceptualnom uputom u situaciji vremenskog pritiska, $r(101) = -.05$, $p = .60$, i bez vremenskog pritiska, $r(101) = .05$, $p = .61$).

Slični rezultati pronađeni su i kod zadataka o neproporcionalnom odnosu (kontrolna skupina u situaciji vremenskog pritiska, $r(119) = .03$, $p = .73$, i bez vremenskog pritiska, $r(120) = .26$, $p = .004$; skupina s proceduralnom uputom u situaciji vremenskog pritiska, $r(105) = .02$, $p = .87$, i bez vremenskog pritiska, $r(105) = .15$, $p = .12$; skupina s konceptualnom uputom u situaciji vremenskog pritiska, $r(101) = .11$, $p = .27$, i bez vremenskog pritiska, $r(101) = .08$, $p = .44$).

4.2.2.3. Metakognitivni osjećaj točnosti

U tablici 4 prikazani su deskriptivni podaci o prosječnom osjećaju točnosti za svih pet zadataka o proporcionalnom odnosu i pet zadataka o neproporcionalnom odnosu. Kao što je već navedeno, kada govorimo o metakognitivnom osjećaju točnosti prilikom odgovaranja s vremenskim pritiskom, govorimo o FOR-u (engl. *feeling of rightness*), a kada govorimo o metakognitivnom osjećaju točnosti prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska, govorimo o FJC-u (engl. *final judgement of confidence*).

Mješovitom analizom varijance pokazalo se da je osjećaj točnosti veći za odgovore u zadacima o proporcionalnom nego za odgovore u zadacima o neproporcionalnom odnosu i u situaciji s vremenskim pritiskom ($F(1,329) = 43.96$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .12$) i situaciji bez vremenskog pritiska ($F(1,329) = 17.20$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .05$). Također, i kod zadataka o proporcionalnom odnosu ($F(1,329) = 138.52$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .30$) i kod zadataka o neproporcionalnom odnosu ($F(1,329) = 212.84$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .39$), FJC bio je veći nego FOR.

Tablica 4
Prosječne procjene FOR-a i FJC-a za zadatke o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu.

		Zadaci o proporcionalnom odnosu		Zadaci o neproporcionalnom odnosu	
		Vremenski pritisak (FOR)	Bez vremenskog pritiska (FJC)	Vremenski pritisak (FOR)	Bez vremenskog pritiska (FJC)
	N	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)
Kontrolna skupina	122	4.61 (1.38)	5.50 (1.21)	4.28 (1.32)	5.33 (1.32)
Proceduralna uputa	107	4.23 (1.46)	4.96 (1.44)	4.02 (1.37)	4.86 (1.45)
Konceptualna uputa	103	4.73 (1.52)	5.30 (1.44)	4.33 (1.44)	5.10 (1.40)
Sve tri skupine zajedno	332	4.53 (1.46)	5.27 (1.38)	4.21 (1.38)	5.11 (1.40)

Budući da je kod zadataka o neproporcionalnom odnosu došlo i do povećanja točnosti kod drugog odgovaranja, provjerili smo je li porast osjećaja točnosti bio rezultat povećanja točnosti. Pokazalo se da je podjednak porast točnosti bio u zadacima u kojima su učenici promijenili odgovor iz netočnog u točan, kao i u zadacima u kojima je odgovor promijenjen iz točnog u netočan te u zadacima u kojima učenici nisu mijenjali svoj odgovor, $F(2,76) = 1.92$, $p = .15$, i to u svim skupinama učenika. Dakle, promjena osjećaja točnosti nije ovisila o povećanju točnosti.

Provjerili smo i sposobnost učenika da diskriminiraju normativno točno i netočno riješene zadatke, odnosno izračunali smo relativnu točnost, koja se najčešće računa preko Goodman-Kruskal gamma koeficijenta korelacije. Pritom smo navedeni koeficijent izračunali kao korelaciju između točnosti rješavanja (binarna varijabla: točno ili netočno riješeni zadaci) i osjećaja točnosti (ljestvica od sedam stupnjeva), i to za svakog učenika zasebno. Uzeli smo u obzir svih 10 zadataka zajedno, a ne zasebno zadatke o proporcionalnom odnosu i neproporcionalnom odnosu jer su zadaci o proporcionalnom odnosu u pravilu točno riješeni, a zadaci o neproporcionalnom odnosu su netočno riješeni, čime se smanjuje varijabilitet i mogućnost izračuna samog koeficijenta.

Prosječni gamma koeficijent iznosio je .27 ($SD = .58$) kod odgovaranja s vremenskim pritiskom i .21 ($SD = .66$) kod odgovaranja bez vremenskog pritiska. Usporedbom ovih prosječnih vrijednosti s nulom (engl. *one sample t-test*), pokazalo se da se one razlikuju statistički značajno od nule (vremenski pritisak: $t(307) = 7.99$, $p < .001$; bez vremenskog pritiska: $t(273) = 5.23$, $p < .001$). Dakle, učenici su imali veći osjećaj točnosti za točno riješene

zadatke, što pokazuje da su razlikovali točno i netočno riješene zadatke, ali je vrijednost korelacije bila male veličine. Jednostavna analiza varijance pokazala je da se skupine nisu razlikovale u relativnoj točnosti (vremenski pritisak: $F(2,418) = 1.37$, $p = .26$; bez vremenskog pritiska: $F(2,378) = 0.33$, $p = .72$).

Izračunali smo i koeficijente korelacija između FOR-a i vremena odgovaranja u situaciji s vremenskim pritiskom, i to za svakog učenika kroz svih 10 zadataka. Zatim smo izračunali prosječne vrijednosti Spearmanovog rho koeficijenata korelacije te smo *t*-testom provjerili razlikuje li se ova prosječna vrijednost od nule. Rezultati su pokazali da je osjećaj točnosti manji što je vrijeme odgovaranja duže ($M_{rho} = -.13$, $SD_{rho} = .36$, $t(312) = 6.43$, $p < .001$). Po pojedinim poduzorcima pokazuju se, u pravilu, slični rezultati: kod učenika u kontrolnoj skupini i skupini s konceptualnom uputom osjećaj točnosti bio je manji što je vrijeme odgovaranja bilo je duže (kontrolna skupina: $M_{rho} = -.13$, $SD_{rho} = .35$, $t(115) = 4.15$, $p < .001$; skupina s konceptualnom uputom: $M_{rho} = -.18$, $SD_{rho} = .34$, $t(97) = 5.26$, $p < .001$), a u skupini s proceduralnom uputom osjećaj točnosti nije se razlikovao ovisno o vremenu odgovaranja ($M_{rho} = -.07$, $SD_{rho} = .37$, $t(98) = 1.92$, $p = .06$). U situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska dobiveni su podjednaki rezultati: sve tri skupine zajedno, $M_{rho} = -.11$, $SD_{rho} = .36$, $t(290) = 5.13$, $p < .001$; kontrolna skupina, $M_{rho} = -.13$, $SD_{rho} = .35$, $t(105) = 3.73$, $p < .001$; skupina s proceduralnom uputom, $M_{rho} = -.09$, $SD_{rho} = .37$, $t(96) = 2.27$, $p = .03$; skupina s konceptualnom uputom, $M_{rho} = -.11$, $SD_{rho} = .35$, $t(87) = 2.90$, $p = .005$.

4.2.2.4. Odgovor „nijedno od ponuđenoga“

Kako bismo provjerili jesu li učenici odabirali odgovor „nijedno od ponuđenoga“ kao izlaznu strategiju kada nisu znali odgovor i u situaciji s vremenskim pritiskom i u situaciji bez vremenskog pritiska, najprije smo izračunali FOR i FJC za svakog/svaku učenika/učenicu kada je odabrao/odabrala točan odgovor, distraktor i odgovor „nijedno od ponuđenoga“, zasebno za zadatke o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu. Deskriptivni podaci za cijeli uzorak prikazani su u tablici 5.

U tablici 5 može se uočiti manji FOR i FJC za odgovor „nijedno od ponuđenoga“ u odnosu na točne odgovore. Kod zadataka o proporcionalnom odnosu FOR i FJC približno su istih vrijednosti za distraktore i odgovor „nijedno od ponuđenoga“, dok su kod zadataka o neproporcionalnom odnosu FOR i FJC manji za odgovor „nijedno od ponuđenoga“ u odnosu na distraktore.

Tablica 5
Prosječan FOR i FJC za točne odgovore, distraktore i odgovor „nijedno od ponuđenoga“ kod zadataka o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu.

	točan odgovor		distraktor		„nijedno od ponuđenoga“	
	N	*M* (*SD*)	*N*	*M* (*SD*)	*N*	*M* (*SD*)
FOR (vremenski pritisak)						
Zadaci o proporcionalnom odnosu	330	4.66 (1.48)	123	3.37 (1.70)	74	3.66 (1.78)
Zadaci o neproporcionalnom odnosu	204	3.94 (1.65)	308	4.20 (1.50)	92	3.68 (1.62)
FJC (bez vremenskog pritiska)						
Zadaci o proporcionalnom odnosu	329	5.37 (1.40)	101	4.40 (1.67)	89	4.43 (1.66)
Zadaci o neproporcionalnom odnosu	211	4.94 (1.72)	287	5.00 (1.57)	106	4.18 (1.72)

Kako bismo provjerili razlikuju li se statistički značajno FOR i FJC za tri ponuđena odgovora, korištena je mješovita analiza varijance, a u analizu su uključeni učenici koji su barem jednom odabrali točan odgovor, barem jednom distraktor i barem jednom odgovor „nijedno od ponuđenoga“. Zaključci se stoga ne odnose na sve učenike koji su odabrali odgovor „nijedno od ponuđenoga“ (npr. nisu nikad odabrali distraktor ili nemaju točnih odgovora). Deskriptivna statistika za učenike koji su uvršteni u analizu prikazana je u tablici 6.

Kod zadataka o proporcionalnom odnosu rezultati su pokazali da kada su učenici odabrali točan odgovor imali su veći FOR nego kada su odabrali distraktor, a kada su odabrali odgovor „nijedno od ponuđenoga“ imali su podjednak FOR kao i kada su odabrali točan odgovor i distraktor, $F(2,58) = 4.42$, $p = .016$, $\eta_p^2 = .13$. FJC se nije razlikovao ovisno o odabranom odgovoru, $F(2,74) = 2.54$, $p = .09$. Vrijeme odgovaranja nije se ni u jednoj skupini razlikovalo ovisno o odabranom odgovoru u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom, iako je *F*-omjer bio granično statistički značajan, $F(2,58) = 3.16$, $p = .05$, $\eta_p^2 = .10$. U situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska nije bilo razlike u vremenu odgovaranja ovisno o odabranom odgovoru, $F(2,74) = 1.38$, $p = .26$). Kod zadataka o neproporcionalnom odnosu, nije bilo razlike u FOR-u ($F(2,90) = 1.23$, $p = .30$) ni vremenu odgovaranja ($F(2,90) = 0.43$, $p = .66$) s obzirom na odabrani odgovor. Prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska, iako je *F*-omjer bio statistički značajan ($F(2,92) = 3.75$, $p = .03$, $\eta_p^2 = .08$), nije bilo razlike u FJC-u ovisno o odabranom odgovoru. Vrijeme odgovaranja u svim je skupinama bilo duže kada su

učenici odabrali odgovor „nijedno od ponuđenoga“ u odnosu na točne odgovore i distraktore, između kojih nije bilo razlike u vremenu odgovaranja, $F(2,92) = 3.89$, $p = .024$, $\eta_p^2 = .08$.

Tablica 6
Prosječne procjene FOR-a i FJC-a te vrijeme odgovaranja za točne odgovore, distraktore i odgovor „nijedno od ponuđenoga“ kod zadataka o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu.

	Zadaci o proporcionalnom odnosu				Zadaci o neproporcionalnom odnosu			
		točan odgovor	distraktor	„nijedno od ponuđenoga“		točan odgovor	distraktor	„nijedno od ponuđenoga“
	N	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*N*	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)
FOR (vremenski pritisak)								
Kontrolna skupina	12	3.85 (1.21)	2.79 (1.50)	2.83 (1.70)	10	3.30 (1.36)	3.78 (1.52)	3.07 (1.43)
Proceduralna uputa	7	3.98 (1.97)	3.14 (1.21)	3.86 (1.89)	17	3.69 (1.73)	3.77 (2.13)	3.76 (1.56)
Konceptualna uputa	13	4.64 (1.76)	3.77 (1.38)	4.44 (1.67)	21	4.21 (1.72)	4.31 (1.58)	3.88 (1.34)
Sve tri skupine zajedno	32	4.20 (1.62)	3.27 (1.42)	3.71 (1.82)	48	3.83 (1.66)	4.01 (1.77)	3.67 (1.45)
FJC (bez vremenskog pritiska)								
Kontrolna skupina	11	4.67 (1.52)	4.77 (1.51)	4.36 (1.64)	15	4.43 (1.97)	4.64 (1.84)	3.32 (2.11)
Proceduralna uputa	13	4.23 (1.97)	3.96 (1.61)	3.54 (1.76)	16	4.48 (1.94	4.27 (1.75)	3.63 (1.89)
Konceptualna uputa	16	5.42 (1.38)	4.75 (1.73)	4.57 (1.32)	18	3.49 (1.14)	3.85 (1.70)	3.93 (1.55)
Sve tri skupine zajedno	40	4.83 (1.67)	4.50 (1.64)	4.18 (1.59)	49	4.10 (1.73)	4.23 (1.76)	3.64 (1.82)
Vrijeme (vremenski pritisak)								
Kontrolna skupina	12	1.22 (0.23)	1.17 (0.23)	1.27 (0.33)	10	1.24 (0.47)	1.29 (0.13)	1.15 (0.31)
Proceduralna uputa	7	0.97 (0.33)	0.84 (0.28)	1.07 (0.46)	17	1.23 (0.27)	1.21 (0.35)	1.40 (0.28)
Konceptualna uputa	13	1.29 (0.12)	1.34 (0.16)	1.34 (0.21)	21	1.28 (0.24)	1.22 (0.45)	1.32 (0.21)
Sve tri skupine zajedno	32	1.19 (0.25)	1.17 (0.28)	1.26 (0.33)	48	1.25 (0.31)	1.23 (0.37)	1.31 (0.27)
Vrijeme (bez vremenskog pritiska)								
Kontrolna skupina	11	1.18 (0.45)	1.10 (0.65)	1.22 (0.48)	15	0.97 (0.50)	0.99 (0.55)	1.34 (0.64)
Proceduralna uputa	13	0.74 (0.44)	0.87 (0.57)	1.04 (0.69)	16	0.99 (0.54)	0.99 (0.55)	1.02 (0.67)
Konceptualna uputa	16	0.92 (0.48)	0.93 (0.61)	1.00 (0.54)	18	0.86 (0.74)	0.84 (0.58)	1.01 (0.57)
Sve tri skupine zajedno	40	0.93 (0.48)	0.96 (0.60)	1.07 (0.57)	49	0.94 (0.50)	0.93 (0.55)	1.11 (0.63)

Napomena: vrijeme odgovaranja transformirano je logaritmiranjem po bazi 10.

4.2.2.5. Detekcija konflikta

Za svakog učenika/učenicu izračunali smo prosječan FOR i FJC, kao i vrijeme odgovaranja, kada je odabrao/odabrala točan odgovor u zadacima o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu, i kada je odabrao/odabrala distraktor u zadacima o neproporcionalnom odnosu (tablica 7), te smo provjerili razlike u FOR-u i FJC-u te vremenu odgovaranja ovisno o odabranom odgovoru.

Tablica 7
Prosječan FOR i FJC te vrijeme odgovaranja za točne odgovore u zadacima o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu te za distraktore u zadacima o neproporcionalnom odnosu.

		Proporcionalnost - točan odgovor	Neproporcionalnost - točan odgovor	Neproporcionalnost - distraktor
	N	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)
Vremenski pritisak (FOR)				
Kontrolna skupina	57	4.40 (1.20)	3.53 (1.39)	4.06 (1.16)
Proceduralna uputa	62	4.13 (1.54)	3.58 (1.68)	3.80 (1.67)
Konceptualna uputa	61	4.77 (1.61)	4.27 (1.71)	4.07 (1.63)
Sve tri skupine zajedno	180	4.43 (1.48)	3.80 (1.63)	3.97 (1.51)
Vremenski pritisak (vrijeme)				
Kontrolna skupina	56	1.18 (0.28)	1.25 (0.41)	1.25 (0.18)
Proceduralna uputa	62	1.16 (0.25)	1.23 (0.28)	1.19 (0.31)
Konceptualna uputa	61	1.28 (0.18)	1.24 (0.32)	1.27 (0.32)
Sve tri skupine zajedno	179	1.21 (0.25)	1.24 (0.34)	1.23 (0.28)
Bez vremenskog pritiska (FJC)				
Kontrolna skupina	48	5.37 (1.44)	4.93 (1.84)	5.15 (1.46)
Proceduralna uputa	58	4.83 (1.61)	4.46 (1.87)	4.53 (1.68)
Konceptualna uputa	59	5.14 (1.57)	4.78 (1.71)	4.60 (1.82)
Sve tri skupine zajedno	165	5.10 (1.55)	4.71 (1.80)	4.73 (1.69)
Bez vremenskog pritiska (vrijeme)				
Kontrolna skupina	48	1.09 (0.42)	1.07 (0.55)	1.08 (0.55)
Proceduralna uputa	58	0.84 (0.48)	0.94 (0.54)	0.93 (0.62)
Konceptualna uputa	59	0.88 (0.48)	0.86 (0.53)	0.95 (0.53)
Sve tri skupine zajedno	165	0.93 (0.47)	0.95 (0.54)	0.98 (0.57)

Napomena: vrijeme odgovaranja transformirano je logaritmiranjem po bazi 10.

Pokazalo se da se FOR statistički razlikuje za tri odabrana odgovora, neovisno o skupini, $F(1.84,325.45) = 21.83$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .11$. Točnije, učenici su imali veći osjećaj točnosti za točne odgovore u zadacima o proporcionalnom odnosu nego točne odgovore i distraktore u zadacima o neproporcionalnom odnosu. Razlike između osjećaja točnosti za točne odgovore i distraktore u zadacima o neproporcionalnom odnosu nisu dobivene.

Budući da je moguće da učenici prilikom odgovaranja s vremenskim pritiskom generiraju rješenja koja im prva padnu na pamet i nisu sigurni u njih pa ih u drugom odgovaranju mijenjaju, provjerili smo detekciju konflikta samo kod učenika koji ostaju kod svojih odgovora, odnosno ne mijenjaju ih u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska. Dobiven je sličan obrazac rezultata: učenici su imali veći FOR kada su ostali kod točnih odgovora u zadacima o proporcionalnom odnosu nego kod točnih odgovora i distraktora u zadacima o neproporcionalnom odnosu, dok između potonjih nije bilo razlike ($F(2,178) = 5.43$, $p = .005$, $\eta_p^2 = .06$), u sve tri skupine učenika.

FJC se također razlikovao ovisno o odabranom odgovoru ($F(1.70,274.80) = 8.92$ $p < .001$, $\eta_p^2 = .05$), odnosno bio je najveći za točne odgovore u zadacima o proporcionalnom odnosu, a nije se razlikovao za točne odgovore i distraktore u zadacima o neproporcionalnom odnosu. Navedeni obrazac rezultata bio je podjednak za sve tri skupine, $F < 1$.

Mješovitom analizom varijance nisu pronađene statistički značajne razlike ($p > .10$) u vremenu odgovaranja ovisno o odabranom odgovoru. Učenici su podjednako brzo odgovarali kada su odabrali točan odgovor u zadacima o proporcionalnom odnosu te točan odgovor i distraktor u zadacima o neproporcionalnom odnosu, i u situaciji s vremenskim pritiskom i u situaciji bez vremenskog pritiska.

4.2.2.6. FOR i pokazatelji procesiranja Tipa 2

Kako bismo provjerili odnos između FOR-a i pokazatelja procesiranja Tipa 2, izračunali smo FOR ovisno o točnosti odgovora, promjeni odgovora i vremenu odgovaranja u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska.

4.2.2.6.1. FOR i točnost odgovora u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska

Kako bismo provjerili odnos između FOR-a i točnosti odgovora u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska, najprije smo za svakog učenika/učenicu izračunali prosječan FOR kada je učenik/učenica prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska odabrao/la točan odgovor i kada je odabrao/odabrala netočan odgovor. U tablici 8 prikazane su prosječne vrijednosti FOR-a neovisno o tome jesu li odabrali distraktor ili odgovor „nijedno od ponuđenoga“), ali i ovisno o tome koji su netočan odgovor odabrali.

Tablica 8
Prosječne procjene FOR-a za točno i netočno riješene zadatke o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu.

		točni odgovori	netočni odgovori		točni odgovori[5]	distraktori	„nijedno od ponuđenoga“
	N	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*N*	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)
Zadaci o proporcionalnom odnosu							
Kontrolna skupina	43	4.38 (1.54)	4.33 (1.65)	11	4.06 (1.84)	4.18 (1.98)	3.73 (1.47)
Proceduralna uputa	50	4.19 (1.57)	3.69 (1.54)	13	4.41 (2.02)	3.38 (1.66)	3.58 (1.85)
Konceptualna uputa	52	4.46 (1.55)	4.10 (1.65)	16	4.47 (1.62)	3.97 (1.88)	4.25 (1.57)
Sve tri skupine zajedno	145	4.40 (1.55)	4.03 (1.62)	40	4.34 (1.78)	3.84 (1.82)	3.89 (1.63)
Zadaci o neproporcionalnom odnosu							
Kontrolna skupina	53	3.99 (1.50)	4.02 (1.41)	15	3.46 (1.71)	4.32 (1.31)	3.44 (1.87)
Proceduralna uputa	66	3.88 (1.50)	3.84 (1.46)	17	3.81 (1.63)	3.96 (1.70)	3.28 (1.39)
Konceptualna uputa	67	4.29 (1.63)	3.91 (1.75)	18	3.20 (1.19)	3.31 (1.62)	3.32 (1.55)
Sve tri skupine zajedno	186	4.06 (1.55)	3.91 (1.55)	50	3.49 (1.50)	3.80 (1.62)	3.34 (1.56)

Provedena je mješovita analiza varijance zasebno za zadatke o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu. Za zadatke o proporcionalnom odnosu pokazalo se da su učenici u svim skupinama imali veći FOR kada su u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska odabrali točan odgovor nego kada su odabrali netočan odgovor, $F(1,142) = 10.30$, $p = .002$, $\eta_p^2 = .07$. Kada se uzme u obzir koji netočan odgovor je odabran, *F*-omjer nije statistički značajan

[5] U usporedbi FOR-a za točne odgovor, distraktore i odgovor „nijedno od ponuđenoga“ broj sudionika bio je drugačiji od usporedbe FOR-a za točne odgovor i obje vrste netočnih odgovora zajedno pa se i deskriptivni podaci za točne odgovore razlikuju.

($F(2,74) = 2.31$, $p = .11$). Rezultati su pokazali da učenici imaju podjednak FOR kada odaberu točan odgovor prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska te kada odaberu distraktor i odgovor „nijedno od ponuđenoga“.

Kod zadataka o neproporcionalnom odnosu, ni u jednoj skupini nije bilo razlike u FOR-u ovisno o tome je li odgovor bio točan ili netočan prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska, $F(1,183) = 1.67$, $p = .20$. Kada smo uzeli u obzir koji netočan odgovor je odabran, *F*-omjer je granično statistički značajan ($F(2,94) = 3.02$, $p = .054$, $\eta_p^2 = .06$), ali post-hoc analiza uz Bonferronijevu korekciju pokazala je da nema razlika u osjećaju točnosti ovisno o odabranom odgovoru.

Provjerili smo i odnos između FOR-a i točnosti odgovora u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska ovisno o točnosti odgovora u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom. Ponovno smo u analizi smo koristili latentne varijable kako bismo kontrolirali pogrešku mjerenja u pojedinim zadacima. Specificirali smo dva modela, jedan za zadatke o proporcionalnom odnosu i drugi za zadatke o neproporcionalnom odnosu. U oba modela izračunali smo latentnu varijablu interakcije, i to na temelju dviju latentnih varijabli: FOR i točnost odgovaranja u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom. Latentna varijabla FOR-a za zadatke o proporcionalnom odnosu bila je definirana na temelju pet manifestnih varijabli, odnosno FOR za svaki od pet zadataka o proporcionalnom odnosu. Za razliku od manifestnih varijabli kod točnosti odgovora, manifestne varijable FOR-a bile su kontinuirane varijable. Na isti način definirana je latentna varijabla FOR-a za zadatke o neproporcionalnom odnosu. Točnost odgovaranja bila je definirana kao na slikama 5a i 5b, zasebno za zadatke o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu. Latentna varijabla koju smo predviđali na temelju latentne interakcije, kao i faktora proporcionalnost/neproporcionalnost u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom i FOR-a, bila je točnost odgovaranja u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska.

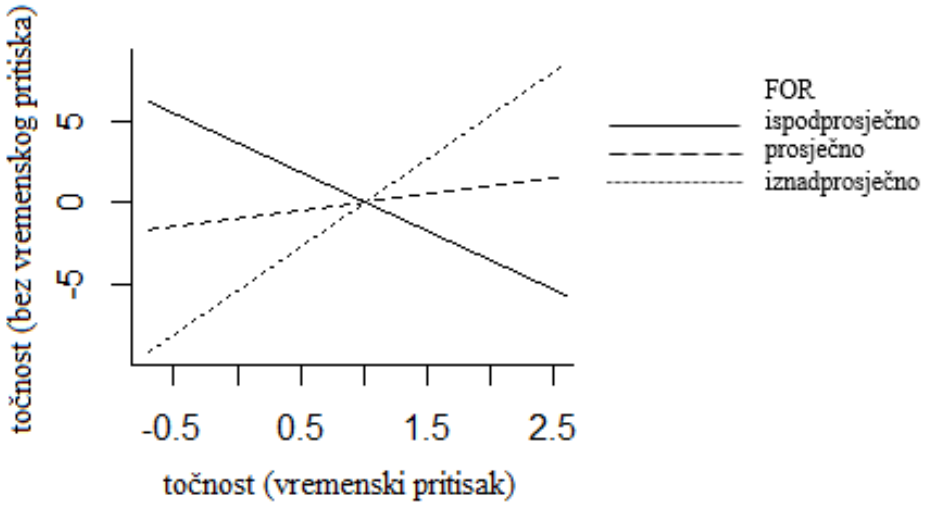
Kako bi se smanjila multikolinearnost između varijabli, prilikom izračuna interakcije latentnih varijabli koristili smo metodu ortogonalizacije ili rezidualnog centriranja (Geldhof, Pornprasertmanit, Schoemann i Little, 2013; Little, Bovaird i Widaman, 2006). Ova metoda preporuča se u situacijama manjeg broja manifestnih varijabli po latentnoj varijabli, kao što je slučaj u našem istraživanju (Henseler i Chin, 2010). Računajući interakciju kroz ortogonalizaciju, određen je umnožak između pojedinih manifestnih varijabli latentne varijable

FOR-a i latentne varijable točnosti kod odgovaranja s vremenskim pritiskom, i to tako da je pomnožen FOR s pripadajućim zadatkom na koji se FOR odnosio.

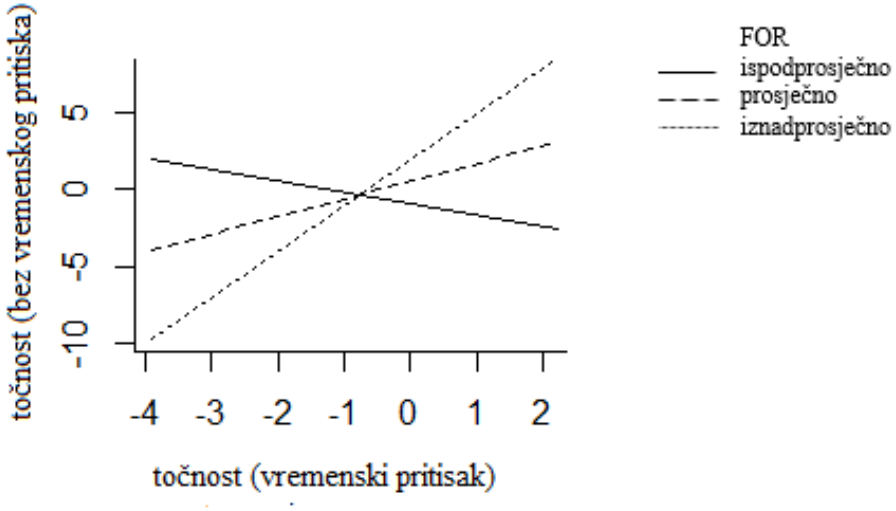
Kod zadataka o proporcionalnom odnosu ($\chi^2(151) = 216.11$, $p < .001$, CFI = .923, TLI = .903, RMSEA = .036, 90% CI RMSEA [.025, .047], SRMR = .075), kao i kod zadataka o neproporcionalnom odnosu ($\chi^2(151) = 212.54$, $p = .001$, CFI = .961, TLI = .951, RMSEA = .035, 90% CI RMSEA [.023, .046], SRMR = .068) pokazalo se da se na temelju interakcije može predvidjeti rezultat na faktoru proporcionalnost ($B = 2.32$, $SE = 0.80$, $\beta = .58$, $p = .004$), odnosno faktoru neproporcionalnost ($B = 1.26$, $SE = 0.47$, $\beta = .27$, $p = .007$) u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska. Latentna interakcija između FOR-a i točnosti u situaciji s vremenskim pritiskom na točnost u situaciji bez vremenskog pritiska prikazana je na slikama 7a i 7b.

Kao što se može vidjeti na slikama 7a i 7b, što su učenici, koji imali ispodprosječan FOR, bili točniji prilikom odgovaranja s vremenskim pritiskom, bili su manje točni prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska. Što su učenici koji imali iznadprosječan FOR bili točniji prilikom odgovaranja s vremenskim pritiskom, bili su i točniji prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska.

Provjerom razlika između kontrolne skupine, skupine s proceduralnom uputom i skupine s konceptualnom uputom, pokazalo se da model u kojem je parametar za regresijski koeficijent interakcije fiksiran jednakim koeficijentom u sve tri grupe imao jednako dobre pokazatelje pristajanja kao i model u kojem je dopuštena slobodna procjena parametra u tri skupine (zadaci o proporcionalnom odnosu: $\Delta\chi^2 = 8.76$, $p = .19$, $\Delta df = 6$; zadaci o neproporcionalnom odnosu $\Delta\chi^2 = 6.80$, $p = .34$, $\Delta df = 6$). Može se stoga zaključiti da je odnos između FOR-a i točnosti odgovaranja podjednak za sve tri skupine.



a) Zadaci o proporcionalnom odnosu



b) Zadaci o neproporcionalnom odnosu

Slika 7. Odnos točnosti odgovaranja u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom i u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska kod ispodprosječnih (<-1SD), prosječnih i iznadprosječnih (>+1SD) razina FOR-a, i to kod zadataka o proporcionalnom odnosu (a) i zadataka o neproporcionalnom odnosu (b). Prikazane su nestandardizirane vrijednosti latentnih varijabli te manja vrijednost predstavlja manju točnost.

4.2.2.6.2. FOR i promjena odgovora u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska

Prosječan broj promjena u zadacima o proporcionalnom odnosu bio je 0.98 (*SD* = 1.12), u zadacima o neproporcionalnom odnosu 1.53 (*SD* = 1.35), a ukupno gledano 2.51 (*SD* = 2.03). Od ukupno 332 učenika koji su dvostruko odgovarali na zadatke (prvim odgovorom koji im je pao na pamet), barem jedan odgovor u svim zadacima promijenilo je 277 (83.4%) učenika, a nijedan odgovor nije promijenilo 55 (16.6%) učenika. Pritom je barem jedan odgovor u zadacima o proporcionalnom odnosu promijenilo 182 (54.8%) učenika, u zadacima o neproporcionalnom odnosu to je učnilo 244 (73.5%) učenika. Jedan odgovor i u zadacima o proporcionalnom odnosu i u zadacima o neproporcionalnom odnosu promijenilo je 149 (44.9%) učenika. Od 150 učenika koji nisu promijenili nijedan odgovor u zadacima o proporcionalnom odnosu, njih 125 (83.3%) ostalo je u svih pet zadataka kod svojeg početnog točnog odgovora. U zadacima o neproporcionalnom odnosu, od 88 učenika koji nisu promijenili odgovor, njih 56 (63.6%) nije promijenilo distraktor kao svoj odabrani odgovor. Jedan učenik promijenio je odgovore u svim zadacima, jedan učenik promijenio je svoje odgovore u svih pet zadataka o proporcionalnom odnosu, a 11 učenika to je učnilo u svih pet zadataka o neproporcionalnom odnosu.

Broj mogućih promjena u zadacima o proporcionalnom odnosu, kao i u zadacima o neproporcionalnom odnosu, bio je od jedan do pet. Učenici su mijenjali odabrane distraktore u točne odgovore, i obrnuto, zatim odgovor „nijedno od ponuđenoga“ u točan odgovor, i obrnuto, te distraktore u „nijedno od ponuđenoga“, i obrnuto. Svaki učenik mogao je napraviti bilo koju od ovih promjena te smo odredili za svakog učenika koju promjenu je učinio te broj tih promjena. Ukupni broj svih vrsta promjena bio je 272 u zadacima o proporcionalnom odnosu i 358 u zadacima o neproporcionalnom odnosu. Broj pojedinih promjena zatim smo podijelili s ukupnim brojem promjena za pojedinu vrstu zadataka. Rezultati su pokazali da je u zadacima o proporcionalnom odnosu bilo 29.0% promjena iz distraktora u točan odgovor, 22.4% iz točnog odgovora u distraktor, 22.1% iz točnog odgovora u „nijedno od ponuđenoga“, 16.2% iz „nijedno od ponuđenoga“ u točan odgovor, 7.7% iz distraktora u „nijedno od ponuđenoga“, 2.6% iz „nijedno od ponuđenoga“ u distraktor. U zadacima o neproporcionalnom odnosu bilo je 36.9% promjena iz distraktora u točan odgovor, 24.0% iz točnog odgovora u distraktor, 13.7% iz distraktora u „nijedno od ponuđenoga“, 7.3% iz „nijedno od ponuđenoga“ u distraktor, 9.2% iz točnog odgovora u „nijedno od ponuđenoga“, 8.9% iz „nijedno od ponuđenoga“ u točan odgovor.

Mješovita analiza varijance pokazala je da su učenici promijenili više odgovora u zadacima o neproporcionalnom nego proporcionalnom odnosu, $F(1,329) = 50.21$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .13$. Osim toga, učenici u skupini s proceduralnom uputom ($M = 2.88$, $SD = 2.38$) promijenili su više odgovora nego učenici u kontrolnoj skupini ($M = 2.22$, $SD = 1.84$), dok nije bilo razlike u broju promjena odgovora između učenika u skupinama s proceduralnom i konceptualnom uputom ($M = 2.47$, $SD = 1.78$) te između učenika u kontrolnoj skupini i učenika u skupini s konceptualnom uputom, $F(2,329) = 3.07$, $p = .048$, $\eta_p^2 = .02$.

Deskriptivni podaci o prosječnom FOR-u u zadacima u kojima su učenici promijenili odgovor i u kojima nisu promijenili odgovor prikazani su u tablici 9.

Tablica 9
Prosječene procjene FOR-a u zadacima o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu ovisno o promjeni odgovora prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska.

		Zadaci o proporcionalnom odnosu			Zadaci o neproporcionalnom odnosu	
		Promjena	Bez promjene		Promjena	Bez promjene
	N	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*N*	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)
Kontrolna skupina	67	3.49 (1.66)	4.43 (1.32)	82	3.26 (1.52)	4.36 (1.22)
Proceduralna uputa	61	3.25 (1.64)	4.10 (1.43)	72	3.70 (1.51)	4.09 (1.56)
Konceptualna uputa	53	3.76 (1.54)	4.50 (1.47)	79	3.66 (1.57)	4.54 (1.71)
Sve tri skupine zajedno	181	3.49 (1.62)	4.34 (1.41)	233	3.53 (1.54)	4.34 (1.51)

Kroz strukturalno modeliranje, na temelju latentnih varijabli točnosti odgovaranja u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom i FOR-a, predviđali smo promjenu odgovora. Specificirali smo modele odvojeno za zadatke o proporcionalnom odnosu od onih o neproporcionalnom odnosu. U modelima smo definirali pet zadataka kao manifestne varijable latentne varijable točnosti odgovora. Latentna varijabla FOR-a imala je, također, pet manifestnih varijabli koje su se odnosile na osjećaj točnosti u svakom od pet zadataka. Latentna varijabla promjene odgovora definirana je na temelju pet manifestnih varijabli koje su predstavljale binarne varijable (tj. je li učenik promijenio odgovor ili nije promijenio odgovor).

Kod zadataka o proporcionalnom odnosu, model ($\chi^2(82) = 139.97$, $p < .001$, CFI = .942, TLI = .926, RMSEA = .046, 90% CI RMSEA [.033, .059], SRMR = .082) je pokazao, da što je veća točnost prilikom odgovaranja s vremenskim pritiskom ($B = -0.46$, $SE = 0.17$, $\beta = -.51$, $p = .008$) i što je veći FOR ($B = -0.18$, $SE = 0.06$, $\beta = -.38$, $p = .002$), to je manji broj promjena

odgovora u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska. Kod zadataka o neproporcionalnom odnosu ($\chi^2(82) = 200.19$, $p < .001$, CFI = .835, TLI = .788, RMSEA = .066, 90% CI RMSEA [.054, .078], SRMR = .096) pokazalo se, da što je manja točnost prilikom odgovaranja s vremenskim pritiskom ($B = 0.20$, $SE = 0.09$, $\beta = .29$, $p = .02$) i što je veći FOR ($B = -0.27$, $SE = 0.07$, $\beta = -.55$, $p < .001$), manji je broj promjena odgovora.

Provjerom razlika između tri skupine, pokazalo se da model u kojem su parametri za regresijski koeficijent latentne varijable točnosti i regresijski koeficijent latentne varijable FOR-a fiksiran jednakim koeficijentom u sve tri grupe imao jednako dobre pokazatelje pristajanja kao i model u kojem je dopuštena slobodna procjena parametra u tri skupine (zadaci o proporcionalnom odnosu: $\Delta\chi^2 = 5.31$, $p = .26$, $\Delta df = 4$; zadaci o neproporcionalnom odnosu $\Delta\chi^2 = 2.03$, $p = .73$, $\Delta df = 4$). Dakle, odnos između FOR-a, točnosti odgovaranja u situaciji s vremenskim pritiskom i promjene odgovora podjednak je za sve tri skupine.

Vrijeme odgovaranja u situaciji bez vremenskog pritiska bilo je u svim skupinama duže kod učenika koji su barem jednom promijenili odgovor u odnosu na učenike koji nisu mijenjali svoje odgovore nijednom, i u zadacima o proporcionalnom odnosu ($F(1,326) = 7.92$, $p = .005$, $\eta_p^2 = .02$), i u zadacima o neproporcionalnom odnosu ($F(1,326) = 14.76$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .04$).

4.2.2.6.3. FOR i vrijeme odgovaranja u situaciji bez vremenskog pritiska

Izračunali smo koeficijente korelacija između FOR-a i vremena odgovaranja u situaciji bez vremenskog pritiska za svakog učenika, i to kroz svih 10 zadataka. Zatim smo izračunali prosječne vrijednosti Spearmanovog rho koeficijenata korelacije za sve učenike koji su bili u situaciji dvostrukog odgovaranja te smo *t*-testom provjerili razlikuje li se ova prosječna vrijednost od nule. Na cijelom uzorku rezultati su pokazali da je vrijeme odgovaranja u situaciji bez vremenskog pritiska duže što je osjećaj točnosti manji ($M_{rho} = -.21$, $SD_{rho} = .39$, $t(312) = 9.68$, $p < .001$). Po pojedinim poduzorcima pokazuju se podjednaki rezultati: kontrolna skupina: $M_{rho} = -.22$, $SD_{rho} = .39$, $t(115) = 6.07$, $p < .001$; skupina s proceduralnom uputom: $M_{rho} = -.19$, $SD_{rho} = .39$, $t(98) = 4.91$, $p < .001$; skupina s konceptualnom uputom: $M_{rho} = -.23$, $SD_{rho} = .39$, $t(97) = 5.73$, $p < .001$.

4.2.2.7. Rješavanje zadataka u skupinama s odgovaranjem samo bez vremenskog pritiska

U ispitivanje na računalima bile su uključene i skupine koje su odgovarale samo jednom na zadatke, i to bez vremenskog pritiska, kako bismo provjerili jesu li odgovori kod skupina s

dvostrukim odgovaranjem u drugom odgovaranju prvenstveno pod utjecajem prvog odgovaranja ili refleksivnijeg rješavanja zadataka. Prosječan broj točnih odgovora, distraktora i odgovora „nijedno od ponuđenoga“, prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska, prikazani su tablici 10. Osim toga, u tablici 10 prikazani su rezultati analize varijance za ponovljena mjerenja s Greenhouse-Geisser korekcijom, provedenoj zasebno za pojedine skupine. Analizom varijance smo provjerili, postoje li razlike u broju odabranih točnih odgovora, distraktora i odgovora „nijedno od ponuđenog“ u zadacima o proporcionalnom i o neproporcionalnom odnosu. Rezultati za skupine koje su imale dvostruko odgovaranje prikazani su u tablici 3, a ovdje su navedeni kako bi preglednost rezultata bila bolja.

U tablici 10 može se uočiti da postoje razlike u broju odabranih točnih odgovora, distraktora i odgovora „nijedno od ponuđenog“ u zadacima o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu. Kod zadataka o proporcionalnom odnosu, post-hoc analiza uz Bonferronijevu korekciju pokazala je da učenici odabiru više točnih odgovora nego distraktora ili odgovora „nijedno od ponuđenoga“. Između broja odabranih distraktora i odgovora „nijedno od ponuđenoga“ nije bilo razlike. Kod zadataka o neproporcionalnom odnosu, post-hoc analiza uz Bonferronijevu korekciju pokazala je da su učenici u skupinama s proceduralnom i konceptualnom uputom (bilo da su odgovarali dva puta, bilo da su odgovarali jednom) odabrali podjednak broj točnih odgovora i odgovora sukladnih proporcionalnosti ($\Delta M < 0.65$). Istovremeno su odabrali najmanje odgovora „nijedno od ponuđenoga“, dok su u kontrolnim skupinama odabrali najviše distraktora, zatim točnih odgovora i najmanje odgovora „nijedno od ponuđenoga“. Dakle, iluzija proporcionalnosti nije bila izražena u skupinama koje su bile izložene produktivnoj pogrešci, dok je u ostalim situacijama iluzija proporcionalnosti bila prisutna..

Tablica 10

Prosječan broj odabranih točnih odgovora, distraktora i odgovora „nijedno od ponuđenoga“ prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska, ovisno o intervenciji.

		Zadaci o proporcionalnom odnosu						Zadaci o neproporcionalnom odnosu					
		točan odgovor	distraktor	„nijedno od ponuđenoga“				točan odgovor	distraktor	„nijedno od ponuđenoga“			
	N	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*F*	*df*	η_p^2	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*F*	*df*	η_p^2
Dvostruko odgovaranje													
Kontrolna skupina	122	4.37 (1.02)	0.36 (0.72)	0.27 (0.60)	695.35***	1.41, 170.99	.85	1.18 (1.59)	3.48 (1.75)	0.34 (0.65)	106.89***	1.22, 147.42	.47
Proceduralna uputa	107	4.02 (1.28)	0.44 (0.83)	0.54 (0.93)	277.91***	1.54, 162.79	.72	1.95 (1.73)	2.51 (1.77)	0.53 (0.89)	32.32***	1.40, 148.49	.23
Konceptualna uputa	103	3.98 (1.21)	0.53 (0.78)	0.49 (0.88)	289.68***	1.53, 155.98	.74	2.14 (1.68)	2.30 (1.68)	0.57 (0.89)	29.10***	1.44, 146.47	.22
Sve tri skupine zajedno	332	4.14 (1.18)	0.44 (0.77)	0.42 (0.82)	1142.01***	1.51, 498.19	.78	1.73 (1.71)	2.80 (1.80)	0.48 (0.82)	131.28***	1.33, 439.28	.28
Samo jedno odgovaranje													
Kontrolna skupina	152	4.30 (1.02)	0.30 (0.59)	0.41 (0.73)	819.46***	1.41, 212.57	.84	1.24 (1.60)	3.34 (1.70)	0.44 (0.73)	114.29***	1.29, 194.66	.43
Proceduralna uputa	151	4.21 (1.02)	0.39 (0.75)	0.40 (0.70)	699.68***	1.62, 242.81	.82	2.10 (1.71)	2.45 (1.76)	0.45 (0.73)	52.59***	1.27, 190.39	.26
Konceptualna uputa	152	4.28 (1.05)	0.30 (0.66)	0.41 (0.81)	710.64***	1.55, 234.50	.83	2.13 (1.72)	2.37 (1.68)	0.49 (0.79)	49.51***	1.34, 201.87	.25
Sve tri skupine zajedno	455	4.26 (1.03)	0.33 (0.67)	0.41 (0.75)	2227.47***	1.54, 700.50	.83	1.82 (1.72)	2.72 (1.76)	0.46 (0.75)	177.21***	1.28, 582.44	.28

***$p < .001$

Kako bismo provjerili razlike u broju točnih odgovora između skupina koje su bile izložene istoj intervenciji, ali su ili dva puta (s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska) ili jednom (samo bez vremenskog pritiska) odgovarale na zadatke, koristili smo multigrupnu analizu kroz koju smo provjerili razlike u latentnim aritmetičkim sredinama. Model smo specificirali kao na slici 5b i prije provjere razlika u latentnim aritmetičkim sredinama provjerili smo invarijantnost (uspoređivano je šest skupina: kontrolna skupina, skupina s proceduralnom uputom i konceptualnom uputom prilikom dvostrukog odgovaranja te kontrolna skupina, skupina s proceduralnom uputom i konceptualnom uputom prilikom odgovaranja samo jednom). Model skalarne invarijantnosti (zajedno je provjerena invarijantnost saturacija i pragova) ($\chi^2(234) = 300.26$, $p = .002$, CFI = .967, TLI = .962, RMSEA = .047, 90% CI RMSEA [.029, .061], SRMR = .149) imao je jednako dobro pristajanje podacima kao i model konfiguralne invarijantnosti ($\chi^2(204) = 309.91$, $p < .001$, CFI = .947, TLI = .929, RMSEA = .063, 90% CI RMSEA [.048, .077], SRMR = .144) ($\Delta\chi^2 = 27.40$, $p = .60$, $\Delta df = 30$, ΔCFI = .004, ΔRMSEA = .012). Model striktne invarijantnosti imao je jednako dobro pristajanje podacima kao i model skalarne invarijantnosti ($\chi^2(284) = 383.72$, $p < .001$, CFI = .950, TLI = .952, RMSEA = .052, 90% CI RMSEA [.038, .065], SRMR = .155) ($\Delta\chi^2 = 54.02$, $p = .32$, $\Delta df = 50$, ΔCFI = .017, ΔRMSEA = .005).

Stoga smo u multigrupnoj analizi mogli provjeriti razlike u latentnim aritmetičkim sredinama u točnosti rješavanja zadataka o proporcionalnom i o neproporcionalnom odnosu prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska. Najprije smo odredili pokazatelje pristajanja modela podacima u kojem su odsječci za skupine koje su bile izložene istoj intervenciji bili slobodno procijenjeni: $\chi^2(288) = 385.48$, $p < .001$, CFI = .951, TLI = .954, RMSEA = .051, 90% CI RMSEA [.037, .064], SRMR = .155. Zatim smo fiksirali odsječke za skupine koje su bile izložene istoj intervenciji i uspoređivali pokazatelje slaganja s modelom u kojem su odsječci bili slobodno procijenjeni. Pokazalo se da model, u kojem su odsječci za skupine izložene istoj intervenciji fiksirani istim parametrom ($\chi^2(292) = 385.58$, $p < .001$, CFI = .953, TLI = .956, RMSEA = .050, 90% CI RMSEA [.035, .063], SRMR = .155), ima jednako dobro pristajanje podacima kao i model u kojem su odsječci slobodno procijenjeni ($\Delta\chi^2 = 3.16$, $p = .53$, $\Delta df = 4$, ΔCFI = .002, ΔRMSEA = .001). Stoga se može zaključiti da su i kod zadataka o proporcionalnom odnosom i kod zadataka o neproporcionalnom odnosu u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska latentne aritmetičke sredine bile podjednake u kontrolnoj skupini koja je bila izložena dvostrukom odgovaranju i u kontrolnoj skupini koja je bila izložena samo jednom odgovaranju. Isto tako, bile su podjednake u skupini s proceduralnom uputom koja je bila izložena dvostrukom odgovaranju i u skupini s proceduralnom uputom koja je bila izložena

samo jednom odgovaranju. Konačno, bile su podjednake u skupini s konceptualnom uputom koja je bila izložena dvostrukom odgovaranju i u skupini s konceptualnom uputom koja je bila izložena samo jednom odgovaranju. Dakle, skupine koje su bile izložene podjednakoj intervenciji nisu se razlikovale u broju točnih odgovora. Broj točnih odgovora u zadacima o proporcionalnom odnosu bio je veći nego u zadacima o neproporcionalnom odnosu i kod skupina koje su jednom odgovarale na zadatke, kao i kod skupina koje su dva puta odgovarale na zadatke. Kontrolne skupine, i kod dvostrukog odgovaranja i kod odgovaranja samo jednom, imale su veći broj točnih odgovora, nego skupine izložene produktivnoj pogrešci kod zadataka o proporcionalnom odnosu, dok je obrnuto bilo kod zadataka o neproporcionalnom odnosu. Između skupina izloženih produktivnoj pogrešci nije bilo razlike u broju točnih odgovora.

Provjerili smo i razlike u FJC-u i vremenu odgovaranja između skupina izloženih istoj intervenciji, a koje su odgovarale ili dva puta ili samo jednom na zadatke (deskriptivni podaci prikazani su u tablici 11).

Tablica 11
Prosječene procjene FJC-a i vrijeme odgovaranja za točne odgovore, distraktore i odgovor „nijedno od ponuđenoga“ kod zadataka o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu.

		Zadaci o proporcionalnom odnosu		Zadaci o neproporcionalnom odnosu	
		FJC	vrijeme	FJC	vrijeme
	N	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)
Dvostruko odgovaranje					
Kontrolna skupina	122	5.50 (1.21)	1.06 (0.39)	5.33 (1.32)	1.03 (0.44)
Proceduralna uputa	107	4.96 (1.44)	0.92 (0.48)	4.86 (1.45)	0.96 (0.47)
Konceptualna uputa	103	5.30 (1.44)	0.90 (0.45)	5.10 (1.40)	0.95 (0.42)
Sve tri skupine zajedno	332	5.27 (1.38)	0.96 (0.44)	5.11 (1.40)	0.98 (0.44)
Samo jedno odgovaranje					
Kontrolna skupina	152	5.45 (1.29)	1.48 (0.27)	5.27 (1.30)	1.52 (0.25)
Proceduralna uputa	151	5.16 (1.34)	1.47 (0.26)	4.88 (1.47)	1.49 (0.27)
Konceptualna uputa	152	5.09 (1.47)	1.41 (0.28)	4.88 (1.39)	1.48 (0.24)
Sve tri skupine zajedno	455	5.24 (1.37)	1.45 (0.27)	5.01 (1.40)	1.50 (0.25)

Napomena: vrijeme odgovaranja transformirano je logaritmiranjem po bazi 10.

Jednosmjerna analiza varijance pokazala je da se skupine ne razlikuju u FJC-u ni kod zadataka o proporcionalnom odnosu (iako je *F*-omjer bio statistički značajan, post-hoc Scheffé

testom nisu pronađene razlike između skupina; $F(5,781) = 2.99$, $p = .01$, $\eta_p^2 = .02$) ni kod zadataka o neproporcionalnom odnosu (iako je F-omjer bio statistički značajan, post-hoc Scheffé testom nisu pronađene razlike između skupina; $F(5,781) = 3.07$, $p = .01$, $\eta_p^2 = .02$). Vrijeme odgovaranja u zadacima o proporcionalnom odnosu razlikovalo se između skupina ($F(5,781) = 78.28$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .33$), kao i vrijeme odgovaranja u zadacima o neproporcionalnom odnosu ($F(5,781) = 85.89$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .36$). Kod obje vrste zadataka učenici u skupinama koje su dva puta rješavale zadatke brže su odgovarali od učenika koji su jednom rješavali zadatke.

4.3. Iluzija proporcionalnosti u posttestu

U posttestu je sudjelovalo 907 učenika. Kao i u predtestu, učenici su prilikom rješavanja zadataka o proporcionalnom odnosu i neproporcionalnim odnosima mogli dobiti najviše tri boda po zadatku. Uradak smo bodovali tako da su učenici dobili jedan bod za točan postupak, jedan bod za točno rješenje i jedan bod za slijeđenje modela proporcionalnosti u zadatku o proporcionalnom odnosu, odnosno modela neproporcionalnosti u zadacima o neproporcionalnim odnosima. Pritom je jedan neproporcionalni odnos bio kvadratni (k^2), a drugi kubični (k^3). Zadaci o proporcionalnom i neproporcionalnom kvadratnom odnosu bili su jednaki kao u predtestu.

Zadatak o proporcionalnom odnosu nije riješilo devet učenika, zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu 16 učenika i zadatak o neproporcionalnom kubičnom odnosu 42 učenika. Učenici su ostvarili više bodova u zadatku o proporcionalnom odnosu ($M = 2.66$, $SD = 0.66$, 835 [93.7%] rješenja bilo je točno) nego u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu ($M = 1.54$, $SD = 1.34$, 435 [50.0%] rješenja bilo je točno) i zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu ($M = 0.97$, $SD = 1.35$, 260 [30.5%] rješenja bilo je točno) te su u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu ostvarili više bodova nego u zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu, $F(1.97,1682.42) = 653.34$, $p < .001$.

Od 435 netočnih rješenja u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu, njih 325 (74.7%) bilo je sukladnih modelu proporcionalnosti. Međutim, broj odgovora sukladnih modelu proporcionalnosti bio je manji nego broj točnih odgovora. Stoga se može zaključiti da je broj učenika koji nije bio podložan iluziji proporcionalnosti u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu bio veći nego što je broj učenika koji je bio podložan iluziji proporcionalnosti. Od 592 netočna rješenja u zadatku o neproporcionalnom kubičnim odnosom,

njih 459 (77.5%) bilo je sukladno modelu proporcionalnosti. Budući da je u zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu bilo više netočnih nego točnih odgovora, a najčešći netočan odgovor bio je odgovor sukladan modelu proporcionalnosti, može se uočiti da je većina učenika bila podložna iluziji proporcionalnosti u ovom zadatku. U zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu učenici koji su netočno riješili zadatak navodili su i odgovor koji je bio sukladan modelu neproporcionalnosti, ali za kvadratne odnose. Točnije, 87 učenika (14.7% učenika koji su netočno riješili zadatak) navelo je da je potrebno 1350 litara vode ($150 \cdot 3^2$). Većina tih učenika (62.8% od onih koji su kao rješenje napisali 1350) točno je riješila zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu.

Zadatak o proporcionalnom odnosu učenici su najčešće (26.1% učenika) rješavali uz pomoć razmjera u koji su uvrštavali veličinu promjera i broj svijeća (npr. 3 : 20 = 6 : x). Drugi postupak, prema učestalosti (22.0% učenika), bio je određivanje koliko puta je drugi promjer veći od prvoga (tj. određivanje koeficijenta *k*) te množenje tog koeficijenta s brojem svijeća (npr. 6 : 3 = 2 pa je 20 · 2 = 40). Dio učenika eksplicitno je tražio koeficijent *k*, a dio učenika samo je napisao 20 · 2 ili 20 + 20. Treća strategija, prema učestalosti (16.0% učenika), bila je navođenje rješenja bez postupka, odnosno učenici su samo napisali 40 (svijeća). Četvrto, razmjer opsega i broja svijeća računalo je 14.6% učenika, pri čemu je dio učenika koristio samo razmjer, a drugi dio učenika najprije je odredio koeficijent *k* (koliko puta je opseg drugog stola veći od opsega prvog stola) i zatim pomnožio broj svijeća na prvom stolu tim koeficijentom. Peti postupak, prema učestalosti (8.6% učenika), bio je određivanje koeficijenta koji je predstavljao količnik između opsega prvog stola i broja svijeća te dijeljenje opsega drugog stola tim koeficijentom. Šesto, učenici su naveli da je drugi stol dvostruko veći pa treba dvostrukoviše svijeća, što je predstavljalo netočno rezoniranje o zadatku (2.7% učenika). Ostalih 30 postupaka korišteno je vrlo rijetko (u manje od 3% slučajeva), a među njima treba istaknuti još postupak u kojem su učenici napisali da treba 40 svijeća jer je opseg dvostruko veći, ali bez izračuna opsega (2.2% učenika), postupak u kojem su učenici podijelili promjer prvog stola brojem svijeća i podijelili promjer drugog stola s tim brojem (1.4% učenika), te računanje 20 · 3 (0.6% učenika).

U zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu, najviše učenika (30.1% učenika) računalo je razmjer površina i broja svijeća (to je ujedno bio i najčešći postupak kod učenika koji su točno riješili ovaj zadatak, 56.3% tih učenika koristilo je ovaj postupak). Ponovno je dio učenika računao samo razmjer, dio učenika najprije je odredio koeficijent *k* (koliko puta je površina drugog stola veća od površine prvog stola) i zatim pomnožio broj svijeća na prvom stolu s tim koeficijentom, a dio učenika odredio je 20 · 4. Druga najčešća strategija (11.6%

učenika) bila je navođenje netočnog rješenja sukladnog modelu proporcionalnosti bez postupka, odnosno učenici su samo napisali 40 (svijeća). Treći postupak, prema učestalosti (9.5% učenika), bio je računanje razmjera u koji su učenici uvrstili promjere i broj svijeća (npr. 3 : 20 = 6 : x). Četvrti postupak, prema učestalosti (8.4% učenika), bio je računanje koliko puta je drugi promjer veći od prvoga (tj. određivanje koeficijenta *k*). Peto, 7.7% učenika određivalo je koeficijent koji je predstavljao količnik između površine prvog stola i broja svijeća te dijeljenje površine drugog stola tim koeficijentom. U šestoj strategiji, prema učestalosti, 6.4% učenika navelo je samo točno rješenje (80 svijeća). Ostalih 57 različitih postupaka korišteno je vrlo rijetko (u manje od 5% slučajeva). Primjerice, 3.4% učenika računalo je 20 · 3, zatim 2.1% učenika navelo je da je drugi stol dvostruko veći pa treba dvostruko više svijeća, 2.0% učenika napisalo je 20 · 2 = 40 pa 40 · 2 (čime su dobili 80, ali postupak je netočan), te 1.5% učenika napisalo je $20 \cdot k^2$, odnosno 20 · 4.

U zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu, najviše učenika (27.6%) napisalo je samo 150 · 3. Nadalje, 18.2% učenika računalo je veličinu brida prvog bazena i nakon toga su izračunali veličinu brida drugog bazena i kubirali taj broj (to je ujedno bio i najčešći postupak kod učenika koji su točno riješili ovaj zadatak, 60.4% tih učenika koristilo je navedeni postupak). Treći po učestalosti najčešći korišteni postupak (9.0% učenika) bilo je računanje kao da se radi o neproporcionalnom kvadratnom odnosu. Točnije, učenici su napisali samo 1350 ili 150 · 9. Četvrto, učenici su napisali samo 450 (8.7% učenika), odnosno netočno rješenje sukladno modelu proporcionalnosti. Peto, 6.5% učenika računalo je razmjer volumena i stranica (a : 150 = 3a : x). Šesto, 5.7% učenika računalo je k^3, pri čemu je dio učenika računao $150 \cdot k^3$, a dio učenika računao je razmjer 1 : 150 = 27 : x. Sedmo, 4.4% učenika računalo je $(3a)^3 = 27$, 150 · 27 = 4050. Ostalih 59 postupaka učenici su koristili u manje od 3% slučajeva. Primjerice, 0.5% učenika izračunalo je dužinu brida pomoću formule za opseg, pomnožilo dobiveni iznos s tri i opet preko formule za opseg izračunalo količinu vode u drugom bazenu, ili 0.2% učenika nacrtalo je kocku koju su podijelili na 27 dijelova i zaključili da je potrebno 150 · 27 litara vode.

Kao i u predtestu, učenici su koristili crteže (zadatak o proporcionalnom odnosu: 29.6%; zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu: 24.3%; zadatak o neproporcionalnom kubičnom odnosu: 40.5%). Crteži su u pravilu bili samo skice kruga ili kvadrata/kocke/kvadra, ali koje nisu bile precizne.

Odgovaranje na pitanje o sličnostima i razlikama među zadacima kategorizirali smo u četiri kategorije. Te kategorije su bile određene zasebno za sličnosti i zasebno za razlike te su bile jednake kategorijama korištenima u analizi predtesta. Odgovor je mogao biti svrstan u jednu kategoriju kod određivanja sličnosti, ako se učenik pozivao samo na jednu sličnost, i isto

tako u jednu kategoriju kod određivanja razlika, ako se učenik pozivao samo na jednu razliku. Međutim, odgovor je mogao biti svrstan i u više kategorija, ako je učenik navodio više informacija i objašnjenja po čemu su zadaci slični/različiti. Stoga je broj kategoriziranih objašnjenja bio veći nego broj sudionika. Time je dobiveno ukupno 1032 odgovora kod određivanja sličnosti i 1058 odgovora kod određivanja razlika. Kao i u predtestu, 25% odgovora bilo je dvostruko kodirano od strane istraživača i još jednog kodera te je stupanj slaganja iznosio $\kappa = .98$ za sličnosti i $\kappa = .99$ za razlike.

U kategoriju 1 svrstana su objašnjenja u kojima su se učenici za objašnjenje sličnosti i razlika pozivali na informacije iz teksta, ponekad se pozivajući samo na sličnosti na zadatke o stolu i svijećama, a ponekad na sva tri zadatka (npr. za sličnosti: zadaci su slični po tome što se spominje Marija, okrugli stol, svijeće; po tome kako su postavljeni; po tome što se traži da se izračuna broj svijeća; za razlike: zadaci su različiti zato što se svijeće stavljaju po rubu stola ili po gornjoj plohi stola; različiti su jer je u prva dva zadatka stol, a u trećem bazen; različiti su jer su drugačije postavljeni). U kategoriji 1 bilo je 39.1% objašnjenja kod određivanja sličnosti i 37.4% kod određivanja razlika.

U kategoriji 2 nalazila su se objašnjenja u kojima su se učenici pozivali na postupak i rješenje. Kao i u predtestu, učenici su se mogli pozivati na netočno rješenje zadatka ili pogrešan postupak. Takva su objašnjenja uzeta u obzir jer je cilj ovog pitanja bio ispitati kako učenici razmišljaju o zadacima. Za sličnosti učenici su navodili, primjerice, da su zadaci slični prema postupku, rješenju, pristupu rješavanju, korištenju omjera ili formula. Navodili su i da su zadaci slični prema traženju koeficijenta k (ukupno pet učenika). Za razlike učenici su navodili, primjerice, da su zadaci različiti prema postupku, formulama, koeficijentu k koji se treba izračunati. U ovu kategoriju svrstano je 22.7% objašnjenja kod određivanja sličnosti i 14.8% kod određivanja razlika.

Kategorija 3 uključivala je objašnjenja u kojima su se učenici pozivali na shvaćanje zadatka i matematičke pojmove u zadatku. Primjeri objašnjenja iz kategorije 3 za sličnosti su sljedeći: zadaci su slični prema tipu matematičkog zadatka; logičkom zaključivanju, smislu; zahtijevaju poznavanje matematičkih pojmova ili elemenata; pojavljuje se odnos dviju stvari; treba se povezati opseg, površina ili volumen jednog lika/tijela s drugim; nemaju određene opsege i površine, ali imaju dovoljno informacija da se izračuna zadatak. Primjeri objašnjenja iz kategorije 3, koji se odnose na razlike između zadataka su sljedeći: zadaci su različiti jer se prvi mogao i logički zaključiti; u prvom se radi o opsegu, u drugom o površini, a u trećem o volumenu; prema matematičkim izrazima, funkcijama; prema broju dimenzija; prema mjernim

jedinicama. U kategoriju 3 svrstano je 26.0% objašnjenja i to kod određivanja sličnosti među zadacima i 35.6% kod određivanja razlika.

Odgovori „ne znam“ i slučajevi u kojima nije bilo odgovora na pitanje kategorizirani su u zasebnu kategoriju 4 (12.0% odgovora kod sličnosti i 12.1% kod razlika).

Može se uočiti da je dominantna kategorija bila kategorija 1 (pozivanje na tekst zadatka u određivanju sličnosti i razlika među zadacima), koja se odnosila na površna obilježja zadataka. Kod određivanja razlika gotovo jednak broj objašnjenja kao u kategoriji 1 bio je i u kategoriji 3 (shvaćanje zadataka i pozivanje na matematičke pojmove). Kao i kod predtesta, može se uočiti da se kategorija 1 odnosila na površna obilježja zadataka, dok su se kategorije 2 i 3 odnose se na dublju razinu obrade informacija prilikom odgovaranja na pitanje o sličnostima i razlikama između zadataka.

Usporedili smo i jesu li učenici koji su točno riješili zadatke davali objašnjenja iz dubljih razina obrade u odnosu na učenike koji su netočno riješili zadatke. Pritom je svaki učenik bio svrstan samo u jednu kategoriju: površna ili dublja obrada informacija (ako je, primjerice, učenik imao objašnjenje i iz kategorije 1 i iz kategorije 3, bio je svrstan u dublju obradu informacija). Učenici koji su napisali točno rješenje kod zadatka o proporcionalnom odnosu nisu se razlikovali od učenika koji su napisali netočno rješenje prema broju odgovora u kategorijama površne i dublje obrade informacija, i kod opisivanja sličnosti ($\chi^2(1) = 2.58$, $p = .11$) i kod opisivanja razlika ($\chi^2(1) = 1.39$, $p = .24$).

Kod opisivanja sličnosti, učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu navodili su više odgovora iz kategorije dublje obrade informacija (65.1% njihovih odgovora bilo je unutar ove kategorije) u odnosu na učenike koji su netočno riješili zadatak, a koji su navodili više odgovora iz kategorije površne obrade informacija (57.4% njihovih odgovora bilo je unutar ove kategorije) ($\chi^2(1) = 10.01$, $\varphi = .12$, $p = .002$). Kod opisivanja razlika učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu navodili su više odgovora iz kategorije dublje obrade informacija (77.2% njihovih odgovora bilo je unutar ove kategorije) u odnosu na učenike koji su netočno riješili zadatak, a koji su imali približno podjednak broj odgovora iz obje kategorije (površno: 47.3%, dublje: 52.7%) ($\chi^2(1) = 49.42$, $\varphi = .26$, $p < .001$).

Slično tome, kod opisivanja sličnosti, učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom kubičnom odnosu navodili su više odgovora iz kategorije dublje obrade informacija (72.4% njihovih odgovora bilo je unutar ove kategorije) u odnosu na učenike koji su netočno riješili zadatak, a koji su imali približno podjednak broj odgovora iz obje kategorije (površno: 45.3%, dublje: 54.7%) ($\chi^2(1) = 20.18$, $\varphi = .17$, $p < .001$). Kod opisivanja razlika

učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom kubičnom odnosu navodili su više odgovora iz kategorije dublje obrade informacija (77.5% njihovih odgovora bilo je unutar ove kategorije) u odnosu na učenike koji su netočno riješili zadatak, iako su i učenici koji su netočno riješili zadatak imali više odgovora u kategoriji dublje (60.3%) nego površne obrade informacija ($\chi^2(1) = 20.63$, $\varphi = .17$, $p < .001$).

U posljednjem pitanju učenici su trebali navesti koje matematičke pojmove predstavljaju informacije iz teksta: „rub stola“, „gornja ploha stola“ te „bazen napunjen vodom“. Za zadatak o proporcionalnom odnosu priznati su odgovori „opseg“ ili „kružnica“, za zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu odgovori „površina“ ili „krug“, te za zadatak o neproporcionalnom kubičnom odnosu odgovori „volumen“ ili „kocka“. Svaki od točno navedenih pojmova nosio je jedan bod pa je maksimalan broj bodova bio tri boda. Prosječan broj bodova bio je 2.68 (*SD* = 0.66). Od 872 učenika koji su odgovorili na ovo pitanje, 2.5% učenika navelo je sva tri pojma netočno (npr. proporcije, geometrija, kut, obris, oblik), 76.5% učenika točno je navelo tri pojma, 0.6% učenika točno je navelo samo na koji pojam se odnosio rub stola, 0.8% učenika točno je navelo samo na koji pojam se odnosila gornja ploha stola, a 2.1% učenika točno je navelo samo na koji pojam se odnosio bazen pun vode. Dva točna pojma navelo je 17.5% učenika (najviše onih koji su odgovorili na koje pojmove se odnose rub i gornja ploha).

Broj bodova u zadatku navođenja pojmova razlikovao se ovisno o točnosti rješenja u zadatku o proporcionalnom odnosu ($\chi^2(3) = 12.44$ $p = .01$, *Cramer's V* = .12). Točnije, učenici koji su točno riješili zadatak o proporcionalnom odnosu naveli su češće tri točna pojma (77.0% učenika koji su točno riješili zadatak) u odnosu na učenike koji su netočno riješili zadatak (68.6% učenika koji su netočno riješili zadatak). Od učenika koji su netočno riješili zadatak o proporcionalnom odnosu, 76.8% njih točno je navelo traženi pojam za rub stola.

Broj bodova u zadatku navođenja pojmova razlikovao se ovisno o točnosti rješenja u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu ($\chi^2(3) = 39.06$, $p < .001$, *Cramer's V* = .22). Točnije, učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu naveli su češće tri točna pojma (85.4% učenika koji su točno riješili zadatak) u odnosu na učenike koji su netočno riješili zadatak (67.6% učenika koji su netočno riješili zadatak). Od učenika koji su netočno riješili zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu, njih 84.3% točno je navelo traženi pojam za gornju plohu stola.

Broj bodova u zadatku navođenja pojmova razlikovao se ovisno o točnosti rješenja u zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu ($\chi^2(3) = 43.62$ $p < .001$, *Cramer's V* = .23).

Točnije, učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom kubičnom odnosu naveli su češće tri točna pojma (91.4% učenika koji su točno riješili zadatak) u odnosu na učenike koji su netočno riješili zadatak (70.7% učenika koji su netočno riješili zadatak). Od učenika koji su netočno riješili zadatak o neproporcionalnom kubičnom odnosu, njih 79.9% točno je navelo traženi pojam za bazen napunjen vodom.

Broj bodova u zadatku navođenja pojmova nije se razlikovao ovisno o površnom ili dubljem odgovoru kod navođenja sličnosti u zadatku uspoređivanja ($\chi^2(3) = 3.32$, $p = .35$), ali se razlikovao kod navođenja razlika ($\chi^2(3) = 42.02$, $p < .001$, *Cramer's V* = .24). Točnije, 83.9% učenika koji su naveli odgovor dublje razine procesiranja naveli su tri točna pojma, dok je nešto manje učenika koji su naveli odgovor površne razine procesiranja navelo tri točna pojma (65.6% učenika).

4.3.1. Rješavanje zadataka u posttestu u odnosu na predtest te ovisno o intervenciji na računalima

Broj bodova u zadatku o proporcionalnom odnosu (povećanje $M = 0.08$, $SD = 0.89$) i o neproporcionalnom kvadratnom odnosu (povećanje $M = 0.46$, $SD = 1.34$) u posttestu povećao se statistički značajno u odnosu na predtest (kroz *t*-test testirana je razlika u odnosu na nulu; proporcionalni odnos $t(804) = 2.69$, $p = .007$, neproporcionalni odnos $t(801) = 9.78$, $p < .001$). Broj bodova u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu povećan je više nego u zadatku o proporcionalnom odnosu, $t(801) = 7.22$, $p < .001$, $d_{rm} = 0.40$).

Korelacije između broja bodova u zadacima o proporcionalnom i o neproporcionalnim odnosima u predtestu i posttestu prikazane su u tablici 12.

Tablica 12
Korelacije između broja bodova u zadacima u predtestu i posttestu (N = 736).

		2.	3.	4.	5.
Predtest					
1.	Proporcionalni odnos	.23***	.26***	.16***	.06
2.	Neproporcionalni kvadratni odnos	--	.19***	.53***	.38***
Posttest					
3.	Proporcionalni odnos		--	.30***	.17***
4.	Neproporcionalni kvadratni odnos			--	.44***
5.	Neproporcionalni kubični odnos				--

***$p \leq .001$

Pokazalo se da je korelacija između broja bodova u zadatku o proporcionalnom odnosu u predtestu i posttestu bila je pozitivna i male veličine. Za zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu u predtestu i posttestu ona je bila pozitivna i srednje veličine[6]. Zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu u predtestu, kao i u posttestu, bio je u umjerenoj pozitivnoj korelaciji s rješavanjem zadatka o neproporcionalnom kubičnom odnosu.

Kako bismo provjerili jesu li učenici poboljšali svoj rezultat u posttestu u odnosu na predtest te je li došlo i u kojoj mjeri do transfera u posttestu, izračunali smo razliku u rezultatu u zadatku o proporcionalnom odnosu između posttesta i predtesta te razliku u rezultatu u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu između posttesta i predtesta. Rezultat u zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu predstavljao je sposobnost učenika da naprave transfer naučenoga kroz ispitivanje na računalima na novi tip neproporcionalnog odnosa (tj. na kubični odnos).

Budući da se skupine koje su bile izložene produktivnoj pogrešci nisu međusobno razlikovale u točnosti rješavanja zadataka u situaciji s vremenskim pritiskom, kao i u situaciji bez vremenskog pritiska, u daljnjim analizama spojili smo te skupine u jednu skupinu (u situaciji s vremenskim pritiskom spojili smo tako dvije skupine, a u situaciji bez vremenskog pritiska četiri skupine). Također smo kontrolne skupine u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska spojili u jednu skupinu. Dakle, uspoređivali smo dvije šire skupine učenika: kontrolne skupine i skupine izložene produktivnoj pogrešci.

Učenici u kontrolnim skupinama i skupinama izloženima produktivnoj pogrešci imali su podjednaku razliku između predtesta i posttesta s obzirom na uspješnost rješavanja zadatka o proporcionalnom odnosu ($t(610) = 0.07$, $p = .94$) i zadatka o neproporcionalnom odnosu ($t(603.84) = 1.23$, $p = .22$) te su ostvarili podjednak transfer (uspješnost rješavanja zadatka o neproporcionalnom kubičnom odnosu) ($t(641) = 1.11$, $p = .27$).

Nadalje, kroz strukturalno modeliranje proveli smo multigrupnu analizu, u kojoj smo na temelju rezultata tijekom ispitivanja na računalima predviđali razliku u zadatku o proporcionalnom odnosu, razliku u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu i rezultat u zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu. U jednom modelu predviđali smo navedene varijable samo na temelju rezultata u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom, a u drugom modelu na temelju rezultata u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska. Varijable na temelju kojih su predviđane varijable u posttestu specificirane su kao na slici 5a za odgovaranje s vremenskim pritiskom i na slici 5b za odgovaranje bez vremenskog pritiska (tj. zasebno je

[6] Korelacija između zadataka o neproporcionalnom kvadratnom odnosu bila je pozitivna i srednje veličine i nakon parcijalizacije ocjene iz matematike ($r(655) = .48$, $p < .001$).

definirana latentna varijabala za zadatke o proporcionalnom odnosu i zasebno za zadatke o neproporcionalnom odnosu).

U situaciji s vremenskim pritiskom pokazalo se da su metrijska/skalarna invarijantnost (razlika u odnosu na model konfiguralne invarijantnosti: $\Delta\chi^2 = 10.72$, $p = .30$, $\Delta df = 9$, ΔCFI = .011, ΔRMSEA = .005) i striktna invarijantnost (razlika u odnosu na model metrijske/skalarne invarijantnosti: $\Delta\chi^2 = 12.20$, $p = .51$, $\Delta df = 13$, ΔCFI = .004, ΔRMSEA = .002) zadovoljene. Nadalje, prema $\Delta\chi^2$, model u kojem su fiksirani parametri za regresijske koeficijente granično lošije (a prema ΔCFI lošije) pristaje podacima od modela u kojem su ti parametri slobodno procijenjeni ($\Delta\chi^2 = 11.81$, $p = .07$, $\Delta df = 6$, ΔCFI = .043, ΔRMSEA = .014).

Daljnjom provjerom utvrđeno je da najbolje pristajanje podacima ima model u kojem su slobodno procijenjeni regresijski koeficijenti za predviđanje razlike u rezultatu u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu u posttestu u odnosu na predtest, i to na temelju rezultata na faktoru neproporcionalnosti prilikom odgovaranja s vremenskim pritiskom ($\chi^2(143) = 146.89$, $p = .395$, CFI = .986, TLI = .984, RMSEA = .015, 90% CI RMSEA [.000, .046], SRMR = .126; usporedba s modelom u kojem su navedeni regresijski koeficijenti za obje skupine fiksirani: $\Delta\chi^2 = 7.69$, $p = .006$, $\Delta df = 1$, ΔCFI = .044, ΔRMSEA = .015).

Dakle, na temelju rezultata u zadacima o proporcionalnom odnosu i zadacima o neproporcionalnom odnosu prilikom odgovaranja s vremenskim pritiskom ne možemo ni u jednoj skupini predvidjeti razliku u rezultatu između predtesta i posttesta za zadatak o proporcionalnom odnosu te transfer. Međutim, kod skupina izloženih intervenciji, ali ne i kod skupina koje nisu izložene intervenciji, može se na temelju uspješnijeg rješavanja zadataka o neproporcionalnom odnosu na računalima predvidjeti povećanje uspješnosti rješavanja zadatka o neproporcionalnom kvadratnom odnosu u posttestu u odnosu na predtest (tablica 13).

Tablica 13

Pokazatelji predviđanja razlike u uspješnosti rješavanja zadataka u posttestu u odnosu na predtest i uspješnosti transfera (vremenski pritisak: N = 248; bez vremenskog pritiska: N = 589).

	Razlika – zadatak o proporcionalnom odnosu		Razlika – zadatak o neproporcionalnom odnosu		Transfer	
	B (β)	*SE*	*B* (β)	*SE*	*B* (β)	*SE*
Vremenski pritisak						
Skupine koje nisu izložene intervenciji						
Faktor proporcionalnost	0.12 (.09)	0.12	-0.06 (-.03)	0.18	0.17 (.07)	0.20
Faktor neproporcionalnost	0.01 (.01)	0.08	-0.18 (-.14)	0.30	0.33 (.23)	0.22
Skupine izložene intervenciji						
Faktor proporcionalnost	0.12 (.13)	0.12	-0.06 (-.04)	0.18	0.17 (.11)	0.20
Faktor neproporcionalnost	0.01 (.01)	0.08	0.51 (.26)**	0.18	0.33 (.16)	0.22
Bez vremenskog pritiska						
Skupine koje nisu izložene intervenciji						
Faktor proporcionalnost	-0.003 (-.003)	0.06	0.08 (.05)	0.10	0.19 (.12)	0.13
Faktor neproporcionalnost	0.03 (.06)	0.03	0.03 (.05)	0.06	0.27 (.38)*	0.10
Skupine izložene intervenciji						
Faktor proporcionalnost	-0.003 (-.003)	0.06	0.08 (.05)	0.10	0.19 (.11)	0.13
Faktor neproporcionalnost	0.03 (.04)	0.03	0.19 (.19)***	0.06	0.27 (.26)*	0.10

*$p < .05$, **$p < .01$, ***$p \leq .001$

U situaciji bez vremenskog pritiska rezultati pokazuju da su metrijska/skalarna invarijantnost (razlika u odnosu na model konfiguralne invarijantnosti: $\Delta\chi^2 = 22.48$, $p = .10$, $\Delta df = 15$, ΔCFI = .004, ΔRMSEA = .000) i striktna invarijantnost (razlika u odnosu na model metrijske/skalarne invarijantnosti: $\Delta\chi^2 = 13.74$, $p = .39$, $\Delta df = 13$, ΔCFI = .001, ΔRMSEA = .002) zadovoljene. Kao i u situaciji s vremenskim pritiskom, prema $\Delta\chi^2$, model u kojem su fiksirani parametri za regresijske koeficijente granično lošije pristaje podacima od modela u

kojem su ti parametri slobodno procijenjeni ($\Delta\chi^2$ = 12.41, p = .05, Δdf = 6, ΔCFI = .007, ΔRMSEA = .003).

Daljnjom provjerom utvrđeno je da najbolje pristajanje podacima ima model u kojem su slobodno procijenjeni regresijski koeficijenti za predviđanje razlike u rezultatu u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu u posttestu u odnosu na predtest, i to na temelju rezultata na faktoru neproporcionalnosti prilikom odgovaranja bez vremenskog pritiska ($\chi^2(143)$ = 206.61, p < .001, CFI = .961, TLI = .957, RMSEA = .039, 90% CI RMSEA [.026, .050], SRMR = .103; usporedba s modelom u kojem su navedeni regresijski koeficijenti za obje skupine fiksirani: $\Delta\chi^2$ = 4.20, p = .04, Δdf = 1, ΔCFI = .005, ΔRMSEA = .002).

Dakle, na temelju rezultata u zadacima o proporcionalnom odnosu i zadacima o neproporcionalnom odnosu prilikom odgovaranja s vremenskim pritiskom ne možemo ni u jednoj skupini predvidjeti razliku u rezultatu između predtesta i posttesta za zadatak o proporcionalnom odnosu. Međutim, kod skupina izloženih intervenciji, ali ne i kod skupina koje nisu izložene intervenciji, može se na temelju uspješnijeg rješavanja zadataka o neproporcionalnom odnosu na računalima predvidjeti povećanje uspješnosti rješavanja zadatka o neproporcionalnom kvadratnom odnosu u posttestu u odnosu na predtest (tablica 13). Kod obje skupine veći rezultat na faktoru neproporcionalnost pozitivno je predviđao transfer u posttestu[7].

U zadatku određivanja sličnosti i razlika u posttestu podjednak broj učenika iz navedene dvije skupine (kontrolne skupine i skupine izložene intervenciji) navodio je odgovore iz površnih i dubljih razina procesiranja informacija prilikom određivanja sličnosti ($\chi^2(2)$ = 1.50, p = .47), kao i prilikom određivanja razlika ($\chi^2(2)$ = 4.92, p = .09). Također, učenici iz dvije skupine imali su podjednak broj točnih odgovora u zadatku određivanja matematičkih pojmova ($\chi^2(3)$ = 5.21, p = .16).

[7] Korelacija između rješavanja zadataka o neproporcionalnom odnosu na računalima u situaciji s vremenskim pritiskom i broja bodova u neproporcionalnom kvadratnom odnosu u predtestu i posttestu bila je umjerena (za predtest, $r(287)$ = .29, p < .001; posttest, $r(274)$ = .35, p < .001), a s rješavanjem zadatka o neproporcionalnom kubičnom odnosu u posttestu bila je niska ($r(267)$ = .14, p = .02).
Korelacija između rješavanja zadataka o neproporcionalnom odnosu na računalima u situaciji bez vremenskog pritiska i broja bodova u neproporcionalnom kvadratnom odnosu u predtestu i posttestu bila je umjerena (za predtest, $r(670)$ = .30, p < .001; posttest, $r(663)$ = .39, p < .001), a s rješavanjem zadatka o neproporcionalnom kubičnom odnosu u posttestu bila je niska ($r(641)$ = .23, p < .001).

5. RASPRAVA

U ovom istraživanju cilj je bio provjeriti postavke teorija dualnih procesa i meta-rezoniranja u području matematičkog rezoniranju na temelju modela proporcionalnosti i neproporcionalnosti kod učenika drugog i trećeg razreda srednje škole. Osim toga, željeli smo provjeriti može li se produktivnom pogreškom smanjiti iluzija proporcionalnosti. U istraživanju smo se usmjerili na poznavanje linearnih odnosa u užem smislu riječi, odnosno proporcionalnih odnosa te njihovo razlikovanje od neproporcionalnih odnosa.

5.1. Predtest: iluzija proporcionalnosti i matematičke kompetencije učenika

U predtestu smo ispitivali proceduralno i konceptualno znanje učenika. Proceduralno znanje najčešće se mjeri preko točnosti postupka ili rješenja. U našem istraživanju proceduralno znanje procijenili smo preko točnosti rješenja, ali i postupka i slijeđenja načela (ne)proporcionalnosti u zadacima. Analiza postupaka i rješenja pokazala je da su učenici bili točniji u rješavanju zadatka o proporcionalnom odnosu nego kada su rješavali zadatke o neproporcionalnom odnosu, u kojem su imali više odgovora sukladnih proporcionalnosti nego drugih netočnih odgovora. Tako smo potvrdili hipotezu 1 da će učenici u predtestu biti podložni iluziji proporcionalnosti.

Konceptualno znanje može se mjeriti implicitno i eksplicitno. Implicitne mjere konceptualnog znanja su, primjerice, vrednovanje zadataka ili rješenja, a eksplicitne mjere su definiranje ili objašnjavanje postupaka ili pojmova (Canobi, 2004; Rittle-Johnson i Schneider, 2015; Siegler i Stern, 1998). U našem istraživanju konceptualno znanje procijenili smo preko implicitne mjere uspoređivanja zadataka i preko definiranja pojmova iz zadataka. Kod implicitne mjere uspoređivanja zadataka učenici su uspoređivali zadatke koje su tekstualno bili vrlo slični, odnosno uključivali su zajednička obilježja, poput osobe koja se spominje u tekstu, dva stola jednakog kružnog oblika i jednake veličine, svijeća na stolu. Istraživanja u području usporedbi (npr. Gentner i Markman, 1994, 1997; Markman, 1996) pokazala su da uspoređivanje uključuje strukturalno poravnanje (engl. *structural alignment*) u kojem se uzimaju u obzir zajednička obilježja objekata (u našem slučaju zadataka) koji se uspoređuju, razlike koje su povezane sa zajedničkim obilježjima i razlike koje nisu povezane sa zajedničkim obilježjima. Prilikom uspoređivanja, osoba u najvećoj mjeri razmatra i zajednička obilježja i razlike povezane s tim obilježjima, dok razlike koje nisu povezane sa zajedničkim obilježjima rijetko

uočava, što znači da se kod vrlo sličnih objekata lakše navode zajednička obilježja i razlike nego kod vrlo različitih objekata. U našem je istraživanju stoga uspoređivanje, prema strukturalnom poravnanju, bilo olakšano zbog velike sličnosti među zadacima, a to je rezultiralo traženjem i zajedničkih obilježja i razlika koje su povezane s tim zajedničkim obilježjima, što se može uočiti i u odgovorima učenika. Naime, učenici su najčešće navodili dijelove teksta koji se pojavljuju u oba zadatka, a kao razliku navodili su informaciju koja je bila vezana uz smještaj svijeća na stolu, a samo smještanje svijeća na stol predstavlja zajedničko obilježje zadataka. Pritom su učenici najviše navodili, i kod određivanja sličnosti i kod određivanja razlika, informacije vezane uz tekst zadatka te su u manjoj mjeri razmatrali matematičku pozadinu tih sličnosti i razlika. Dakle, učenici su se usmjerili na površna obilježja sličnosti i razlika, a ne na dublja, matematička obilježja, poput postupka, matematičkih pojmova i razumijevanja zadataka.

Kod implicitne mjere definiranja pojmova iz zadataka učenici su najčešće točno navodili koje pojmove predstavljaju pojedini dijelovi teksta, i to neovisno o tome jesu li to znanje primijenili prilikom rješavanja zadataka. Može se stoga primijetiti da učenici nisu povezali znanje koje posjeduju o matematičkim pojmovima s rješavanjem zadataka.

Ranije su istraživanja pokazala da su mjere proceduralnog i konceptualnog znanja povezane (npr. Rittle-Johnson i Alibali, 1999; Schneider, Rittle-Johnson i Star, 2011). Njihova povezanost ovisi o vrsti mjera ovih dvaju vrsta znanja, kao i o dobi učenika (LeFevre i sur., 2006; Schneider i Stern, 2010). U našem istraživanju točnost rješavanja zadatka o neproporcionalnom odnosu, za razliku od točnosti rješavanja zadataka o proporcionalnom odnosu, bila je povezana s mjerama konceptualnog znanja. Budući da u zadacima o proporcionalnom odnosu dobro uvježbani model proporcionalnosti dovodi do normativno točnog odgovora (Bock i sur., 2007; Gillard i sur., 2009b), učenici su u pravilu točno riješili zadatak, primjenjujući postupke kroz koje se nije uočilo da oni razumiju da rub stola predstavlja opseg. Naime, učenici su tražili koliko je drugi promjer veći od prvoga te su koristili razmjer, a to su ujedno i najčešće prikazani načini rješavanja zadataka o proporcionalnom odnosu u hrvatskim udžbenicima (Golac-Jakopović i sur., 2014). Dakle, učenici su bez dubljeg razumijevanja zadatka mogli kroz točan postupak doći do točnog rješenja. Stoga rezultat na mjerama konceptualnog znanja nije povezan s mjerom proceduralnog znanja kod zadatka o proporcionalnom odnosu.

Kod zadatka o neproporcionalnom odnosu, učenici boljeg proceduralnog znanja imali su i bolje konceptualno znanje, procijenjeno kroz određivanja razlika, ali ne i sličnosti, među zadacima, i kroz definiranje matematičkih pojmova koji su u pozadini informacija u tekstu.

Učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom odnosu najčešće su u postupku koristili površinu stola. Osim toga, učenici koji su računali površinu najčešće su u zadatku o proporcionalnom odnosu računali opseg (79.05% učenika koji su računali opseg stola u zadatku o proporcionalnom odnosu, računalo je i površinu stola u zadatku o neproporcionalnom odnosu). Dakle, učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom odnosu najčešće su uočili da rub i ploha predstavljaju opseg i površinu te su razumjeli razliku između dva zadatka. Budući da zadatak o neproporcionalnom odnosu predstavlja nekongruentni zadatak u kojem je potrebno inhibirati automatski odgovor sukladan modelu proporcionalnosti (De Neys i Glumicic, 2008; Putarek i Vlahović-Štetić, 2019), učenici koji su kroz aktiviranje dubljeg procesiranja Tipa 2 (Thompson, 2009) generirali normativno točan odgovor, vjerojatno su uočili matematičku pozadinu u zadacima i primijenili dublje razine proceduralnog znanja i u zadatku o proporcionalnom odnosu i u zadatku o neproporcionalnom odnosu. Posljedično su u zadacima koji su ispitivali konceptualno znanje ovi učenici primijenili aktivirano razumijevanje zadataka, čime su pokazali dublje procesiranje informacija.

Kao što se može uočiti, traženje sličnosti među zadacima nije se pokazalo dobrom mjerom konceptualnog znanja, a učenici se na toj mjeri nisu međusobno razlikovali ni ovisno o proceduralnom znanju. Kada su površne sličnosti vrlo izražene, kao što je bio slučaj u našem istraživanju, učenici se oslanjaju na ta površna obilježja (Reed, Stebick, Comey i Carroll, 2012). Može se stoga pretpostaviti da su učenici površno pristupili određivanju sličnosti među zadacima, neovisno o točnosti rješavanja ostalih zadataka. Ova mjera konceptualnog znanja, za razliku od određivanja razlika, nije bila povezana ni s određivanjem matematičkih pojmova koji su u pozadini zadataka. Međutim, učenici koji su se oslonili na dublje procesiranje informacija kod određivanja razlika imali su i više bodova u zadatku određivanja matematičkih pojmova, što je i razumljivo jer je dublje procesiranje informacija kod određivanja razlika često označavalo i navođenje matematičkih pojmova kao razlike među zadacima.

5.2. Produktivna pogreška

Za razliku od ranijih primjena produktivne pogreške u razredu (npr. Kapur, 2014; Kapur i Bielaczyc, 2012), u ovom je istraživanju produktivna pogreška primijenjena jednokratno u kraćem vremenskom intervalu, i to zato što su učenici bili upoznati s problemskim zadacima koji sadrže proporcionalne i neproporcionalne odnose. Stoga se uz pomoć intervencije nastojalo poboljšati rješavanje i razumijevanje zadataka upravo iz područja iluzije proporcionalnosti, a ne općenito shvaćanje proporcionalnosti i neproporcionalnosti.

Produktivna pogreška sastoji se od dviju faza (Kapur, 2015a). U prvoj fazi učenici samostalno pokušavaju riješiti zadatke te generirati što je više moguće različitih postupaka i rješenja. U našem istraživanju, u prvoj fazi učenici su rješavali zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu te su bili neuspješni, u podjednakoj mjeri kao i u predtestu. Točnije, oko 30% učenika, kao i u predtestu, netočno je riješilo zadatak i najviše netočnih odgovora bilo je sukladnih proporcionalnosti, čime smo potvrdili hipotezu 2. Dakle, učenici su bili podložni iluziji proporcionalnosti i kod zadatka o neproporcionalnom odnosu koji se odnosio na krug u predtestu, kao i kod zadatka o neproporcionalnom odnosu koji se odnosio na kvadrat u produktivnoj pogrešci. U ranijim istraživanjima pokazalo se, također, da učenici podliježu iluziji proporcionalnosti neovisno o obliku geometrijskog lika/tijela i njegovoj (ne)pravilnosti (De Bock, Van Dooren i sur., 2002; De Bock i sur., 2007).

Usprkos uputi da generiraju što više različitih postupaka, to je učinilo samo oko 10% učenika. Aktiviranje šire baze znanja kroz generiranje različitih postupaka i/ili rješenja te optimalna razina izazovnosti zadatka važna su obilježja produktivne pogreške koja doprinose njezinoj učinkovitosti (Kapur, 2016; Loibl i Rummel, 2014). Moguće je da zadatak u našem istraživanju nije bio dovoljno poticajan za generiranje različitih postupaka, ali i da učenici nisu skloni dubljem promišljanju o zadacima te da nastoje primijeniti rutinizirane i jednostavne strategije rješavanja problema, što su pokazala ranija istraživanja na hrvatskim učenicima (npr. Braš Roth i sur., 2017). Osim toga, učenici su bili umjereno motivirani za rješavanje zadataka, a motivacija učenika važna je za kognitivnu uključenost učenika u akademske aktivnosti (Christenson, Reschly i Wylie, 2012; Fredricks, Blumenfeld i Paris, 2004).

Nakon rješavanja zadatka o neproporcionalnom odnosu učenici su u drugoj fazi primjene produktivne pogreške najprije dobili povratnu informaciju o točnosti svojeg rješenja. Povratna informacija od velike je važnosti za stjecanje znanja i razumijevanje pojmova (Glogger-Frey i sur., 2015a), osobito kod dobro automatiziranih anti-znanja (Hung i sur., 2009), kao što je iluzija proporcionalnosti u našem istraživanju. Povratna informacija učinkovitija je ako je odgođena (Mathan i Koedinger, 2003), osobito kod učenika koji nisu početnici u nekom području (Fyfe i Rittle-Johnson, 2016). Učenici u našem uzorku susreću se s problemskim zadacima iz područja proporcionalnosti i neproporcionalnosti od osnovne škole (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2006, 2011) pa se može pretpostaviti da imaju usvojeno znanje o rješavanju tih zadataka i da nisu početnici u tom području. Međutim, model proporcionalnosti dominantniji je od modela neproporcionalnosti, čega učenici nisu svjesni (De Bock, Van Dooren i sur., 2002). Posljedično, neposredna povratna informacija može imati pozitivan učinak jer se odmah korigira njihovo rješenje za koje nisu svjesni da je pogrešno, odnosno za

koje su u velikoj mjeri sigurni da je točno (Putarek i Vlahović-Štetić, 2019). Odgoda povratne informacije mogla bi imati manji učinak jer bi kontrast između izraženog osjećaja točnosti i povratne informacije da je rješenje netočno bio manji, s obzirom na to da su metakognitivna iskustava kratkotrajna i mijenjaju se s protokom vremena (Norman i sur., 2010).

U našem istraživanju, pokazalo se da je povratna informacija o netočnom rješenju izazvala konceptualnu promjenu. Međutim, ovakva povratna informacija bez dodatnih pitanja i rasprave o riješenom zadatku bila je učinkovita samo u manjoj mjeri jer je samo oko 13% učenika izravno navelo u čemu su pogriješili, iako je moguće je da su oni koji nisu izravno promijenili svoj odgovor, također, shvatili u čemu su pogriješili. Dakle, kao što je i inače preporuka, za bolji uvid i veće promjene u načinu razmišljanja potrebno je pogrešna uvjerenja ispravljati kroz poučavanje, zajedno s objašnjavanjem i elaboriranjem pojmova (DeCaro i Rittle-Johnson, 2012; Kapur, 2014, 2016; Kapur i Bielaczyc, 2012).

Budući da je intervencija u ovom istraživanju provedena pomoću računala, ispravljanje pogrešnih uvjerenja pokušali smo postići kroz proučavanje riješenih primjera, što se pokazalo učinkovitom tehnikom poučavanja (npr. Atkinson i sur., 2000; Glogger-Frey i sur., 2015a; Rittle-Johnson i Star, 2007). Osim toga, pogrešna uvjerenja nastojali smo osvijestiti i ispraviti kroz odgovaranje na pitanja prilikom proučavanja riješenih primjera kojima se učenike potiče na promišljanje o primjerima i korištenim postupcima (Bielaczyc i sur., 1995; Chi i sur., 1994). Stoga smo, u našem istraživanju, nakon proučavanja riješenih primjera ponovno pitali učenike da razmisle u čemu su pogriješili. Ovaj puta, broj učenika koji je izravno naveo da je došao do uvida u čemu su pogriješili porastao je na oko 25%.

Dakle, povratna informacija o točnosti odgovora, kao i proučavanje riješenih primjera, doveli su do uvida kod nekih učenika u čemu su pogriješili. Izostanak većeg broja konceptualnih promjena može biti rezultat načina primjene produktivne pogreške. Naime, moguće je da su uloga učitelja i rasprava o rješavanju zadataka nužni za učinkovitost produktivne pogreške te samostalno proučavanje primjera nije dovoljno za konceptualnu promjenu. Dio ranijih istraživanja, provedenih na računalima, pokazao je slične rezultate (npr. Şendağ i Odabaşı, 2009), kao i manjak samoregulacije učenika kada samostalno trebaju proučiti materijal (npr. u istraživanju Glogger-Frey i suradnika [2015b] dio učenika nije uopće koristio CD sa zadacima koje su dobili, a koji je bio nužan za učenje). Budući da su učenici riješene primjere čitali u prosjeku oko jedne minute, moguće je da ih nisu dovoljno ni proučili ni o njima razmislili. Osim toga, učenici su često izloženi izravnom poučavanju s malim udjelom vlastite odgovornosti i promišljanja (Braš Roth i sur., 2017; Lowther, 2003, Vizek Vidović, 2005) pa možda nisu ni pripremljeni na samostalno proučavanje primjera i dolazak do uvida.

5.3. Ispitivanje na računalima

5.3.1. Iluzija proporcionalnosti

Kroz paradigmu dvostrukog odgovaranja provjerili smo izraženost iluzije proporcionalnosti u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska, kao i razlike u izraženosti iluzije proporcionalnosti ovisno o izloženosti učenika intervenciji, odnosno produktivnoj pogrešci.

Vremenski pritisak nastojali smo osigurati uputom, u kojoj je učenicima bilo rečeno da moraju odgovoriti prvim odgovorom koji im padne na pamet i da će se im se mjeriti vrijeme odgovaranja, što neće biti vidljivo na ekranu računala. Za odgovaranje bez vremenskog pritiska bilo im je rečeno da nemaju vremensko ograničenje za odgovaranje, te da dobro razmisle o zadatku i rješenju i da odgovore što točnije. Slične upute korištene su u ranijim istraživanjima (npr. Bago i De Neys, 2017; Thompson i sur., 2011, eksperimenti 1 i 2). Usporedbom vremena odgovaranja u situaciji s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska, uočava se da učenici duže odgovaraju na zadatke u situaciji s vremenskim pritiskom, ali istovremeno navode da su odgovorili prvim odgovorom koji im padne na pamet. Budući da smo uzimali u obzir kumulativno vrijeme čitanja i rješavanja, učenici su možda duže odgovarali u situaciji s vremenskim pritiskom jer su se prvi puta susreli sa zadatkom pa su ga pažljivo čitali. Kada su drugi puta rješavali zadatak, već su se susreli s njime pa ga možda nisu pažljivo čitali. Vrijeme odgovaranja u tom slučaju označava više vrijeme rješavanja nego vrijeme čitanja zadatka. Ovu našu pretpostavku podupiru rezultati usporedbe vremena odgovaranja učenika u situaciji s vremenskim pritiskom i vremena odgovaranja učenika iz skupina koje su trebale samo jednom odgovarati na zadatak, i to što točnije te bez vremenskog pritiska. Naime, ova je usporedba pokazala da je vrijeme odgovaranja bilo duže u skupinama koje su samo jednom odgovarale na zadatak. Dakle, učenici koji su se prvi puta susreli sa zadatkom i koji su trebali dobro promisliti o njemu, bez vremenskog pritiska za odgovaranje, duže su rješavali zadatke od onih učenika koji su se također prvi puta susreli sa zadatkom, ali su trebali riješiti zadatak na temelju prvog odgovora koji im je pao na pamet uz vremenski pritisak.

Iako navedeni rezultati sugeriraju da su učenici odgovarali na temelju automatskog odgovora, ne možemo to sa sigurnošću i tvrditi. Kako bismo bili sigurniji da učenici odgovaraju brzo i na temelju prvog odgovora koji ima padne na pamet, bilo bi korisno postaviti vremensko ograničenje koje bi bilo vidljivo na ekranu računala, a unutar tog vremenskog ograničenja

učenici bi morali odgovoriti na zadatak, kao što je bio slučaj u nekim ranijim istraživanjima (npr. Shynkaruk i Thompson, 2006; Thompson i sur., 2011, eksperiment 3). Međutim, budući da novija istraživanja sugeriraju da procesiranje Tipa 2 može biti brzo (Newman i sur., 2017), ni postavljanjem vremenskog ograničenja ne bismo bili potpuno sigurni da su učenici odgovorili prvim odgovorom koji im je pao na pamet.

Kao što su istraživanja na temelju teorija dualnih procesa pokazala (Gillard i sur., 2009b), proporcionalnost predstavlja heuristik koji je dominantan kod automatskog procesiranja informacija i prilikom manjka kognitivnih kapaciteta za obradu informacija. Zadaci o (ne)proporcionalnosti nisu tipični zadaci kojima se ispituje heurističko procesiranje informacija. Oni zahtijevaju primjenu računskih operacija, dok se u zadacima koji se najčešće koriste u istraživanjima i kojima se u pravilu ispituju heuristici odgovor može donijeti i bez uključivanja složenijih kognitivnih procesa (Tverski i Kahneman, 1974, 1983). Međutim, vremenski pritisak nije negativno utjecao na točnost rješavanja zadataka o proporcionalnom odnosu, što je sukladno rezultatima istraživanja o ostalim heuristicima kod kojih opterećenje radnog pamćenja ne smanjuje točnost rješavanja u kongruentnim zadacima, već u nekongruentnim zadacima (De Neys, 2006b). Naime, učenici su u pravilu točno odgovarali na zadatke o proporcionalnom odnosu te se broj točnih odgovora nije promijenio u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska u odnosu na situaciju odgovaranja s vremenskim pritiskom. Osim toga, u zadacima o proporcionalnom odnosu broj točnih odgovora bio je podjednak kod učenika u svim skupinama (kontrolna skupina, skupina s proceduralnom uputom, skupina s konceptualnom uputom), čime je potvrđena hipoteza 3.1.

Nadalje, u našem istraživanju, u situaciji s vremenskim pritiskom, iluzija proporcionalnosti bila je izražena kod svih skupina učenika. Odgovaranje s vremenskim pritiskom potiče davanje automatskih odgovora koji nisu dubinski analizirani od strane procesiranja Tipa 2 te smanjuje mogućnost inhibicije automatskog odgovora utemeljenog na heuristicima (Thompson i sur., 2011). Uz vremenski pritisak salijentni su odgovori sukladni heuristicima, što su u našem slučaju bili odgovori sukladni modelu proporcionalnosti. Stoga je bilo i očekivano da izloženost učenika produktivnoj pogrešci neće djelovati na rezultate u situaciji s vremenskim pritiskom, odnosno, da će vremenski pritisak povećati oslanjanje na heuristik proporcionalnosti neovisno o proceduralnim ili konceptualnim znanjima stečenima tijekom produktivne pogreške.

Iako je iluzija proporcionalnosti u situaciji s vremenskim pritiskom bila prisutna u svim skupinama, suprotno našoj hipotezi 3.2, učenici koji su bili izloženi produktivnoj pogrešci ipak su imali više točnih odgovora u odnosu na učenike u kontrolnoj skupini koji nisu bili izloženi

produktivnoj pogrešci, ali je razlika u broju točnih odgovora bila vrlo mala. Kao što je ranije spomenuto, moguće je da neki učenici nisu odgovarali prvim odgovorom koji im je pao na pamet, već su razmišljali o zadacima, što je rezultiralo povećanjem točnosti u skupinama izloženima produktivnoj pogrešci. Nadalje, prema modelu intuitivne logike (De Neys, 2012), procesiranje Tipa 1 paralelno generira odgovor utemeljen na heuristicima i odgovor utemeljen na logičkim pravilima, barem u jednostavnim zadacima, pa u nekim situacijama prevlada jedan, a u drugim situacijama drugi odgovor. Sukladno ovom modelu, istraživanja su pokazala da u nekongruentnim zadacima kod više od 50% sudionika procesiranje Tipa 1 može generirati normativno točne odgovore utemeljene na logici (Bago i De Neys, 2017). Osim toga, pokazalo se da se u složenim zadacima pod vremenskim pritiskom sudionicima aktivira procesiranje Tipa 2 (Newman i sur., 2017). Može se stoga pretpostaviti da je kod učenika koji su bili izloženi produktivnoj pogrešci ili procesiranje Tipa 1 generiralo normativno točan odgovor ili da se procesiranje Tipa 2 brže i lakše uključilo u dublju intervenciju. Naime, dio učenika koji je bio izložen produktivnoj pogrešci došao je do konceptualne promjene i usvojio je prikladan *mindware*. Prilikom konceptualne promjene dolazi do novog pogleda na određeno znanje (Eryilmaz, 2002; Meyer i Land, 2006; Vosniadou, 2007). Osim toga, konceptualna promjena je ireverzibilna, odnosno, osoba nakon te promjene nema pogled na informacije kao prije promjene, čak i kad se radi o pristranim i intuitivnim informacijama koje je osoba ranije posjedovala.

U situaciji bez vremenskog pritiska broj točnih odgovora u zadacima o neproporcionalnom odnosu bio je manji nego u zadacima o proporcionalnom odnosu, no došlo je do povećanja broja točnih odgovora u zadacima o neproporcionalnom odnosu kod onih učenika koji su bili izloženi produktivnoj pogrešci. Kada se od učenika traži da razmisle o zadatku i nemaju vremenski pritisak za odgovaranje, procesiranje Tipa 2 može analizirati heuristik generiran od strane procesiranja Tipa 1, inhibirati ga i korigirati (De Neys, 2006a, 2006b; Thompson 2009). Neka su istraživanja pokazala da povećanjem vremena odgovaranja ne raste i točnost odgovora (Ball i sur., 2003; Elqayam i Evans, 2011; Evans 1996, 2007). Naime, sudionici ponekad tijekom dodatnog vremena koje utroše na davanje odgovora racionaliziraju svoj početni, pristrani odgovor. Druga istraživanja pokazuju pak povećanje broja točnih odgovora u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska u odnosu na odgovaranje s vremenskim pritiskom (Shynkaruk i Thompson, 2006). U našem istraživanju povećanje broja točnih odgovora bilo je statistički značajno, ali malo, što upućuje na to da dio učenika dodatno vrijeme, koje imaju na raspolaganju, koristi za dublju analizu i korekciju početnih odgovora. Međutim, inhibiranje modela proporcionalnosti ipak nije kod većine učenika dobro razvijena

sposobnost. Osim toga, produktivna pogreška mogla je doprinijeti uvidu u razlike između zadataka o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu te stjecanju *mindwarea* o neproporcionalnosti, koji su učenici u skupinama izloženima produktivnoj pogrešci mogli iskoristiti kada su imali za to priliku kod odgovaranja bez vremenskog pritiska. Učenici u kontrolnoj skupini, koja nije bila izložena produktivnoj pogrešci, nisu imali jednaku razinu *mindwarea* koji bi mogli iskoristiti za rješavanje zadataka o neproporcionalnom odnosu.

Sukladno našoj hipotezi 3.2, u situaciji bez vremenskog pritiska kod učenika u skupinama izloženima produktivnoj pogrešci broj točnih odgovora i distraktora (tj. odgovora sukladnih proporcionalnosti) bio je podjednak, odnosno, iluzija proporcionalnosti kod tih učenika nije bila prisutna. U ranijim istraživanjima, trening se pokazao djelotvornim u povećanju točnosti rješavanja silogizama. Primjerice, u istraživanju Prowse Turner i Thompson (2009), sudionici su trebali riješiti jedan zadatak, nakon kojeg su dobili povratnu informaciju o točnosti, te su zajedno s eksperimentatorom prolazili kako se zadatak treba riješiti. Slično ovom treningu, u našem istraživanju sudionici su prošli kroz produktivnu pogrešku na računalima, što se pokazalo učinkovitim u smanjenju iluzije proporcionalnosti. Produktivna pogreška pokazala se učinkovitom za poboljšanje matematičkih kompetencija u brojnim istraživanjima (npr. Kapur, 2012; Kapur i Bielaczyc, 2012; Kapur i sur., 2008; Song i Kapur, 2017), a u našem istraživanju pokazuje se korisnom i za smanjenje pristranosti u području matematičkog rezoniranja.

Rezultati pokazuju da je produktivna pogreška dovela do povećanja broja točnih odgovora, neovisno o vrsti upute koja je prezentirana učenicima, čime nije potvrđena hipoteza 3.2 da će veće povećanje biti u skupini izloženoj konceptualnoj uputi nego skupini izloženoj proceduralnoj uputi. Dakle, učenici kojima je bila prezentirana proceduralna uputa bili su podjednako uspješni kao i učenici kojima je prezentirana konceptualna uputa. Međutim, uočava se trend nešto većeg broja točnih odgovora kod učenika koji su bili izloženi konceptualnoj uputi, što bi bilo korisno dodatno istražiti u budućim istraživanjima s ponešto modificiranim uputama. Važnost konceptualne upute i *mindwarea* za rješavanje zadataka u našem istraživanju, može se pretpostaviti i na temelju usporedbe uspješnosti rješavanja zadataka o proporcionalnom i o neproporcionalnom odnosu ovisno o točnosti rješavanja početnog zadatka u okviru produktivne pogreške. Naime, točnost rješavanja početnog zadatka pokazuje *mindware* učenika jer su učenici taj zadatak rješavali prije intervencije i u njemu su mogli upotrijebiti jedino svoje znanje o neproporcionalnosti, kao i općenito matematičko rezoniranje. U našem istraživanju učenici koji su točno riješili početni zadatak bili su uspješniji u rješavanju zadataka o neproporcionalnom odnosu u odnosu na učenike koji su netočno riješili početni zadatak. Dakle,

početni *mindware* pomogao je učenicima u rješavanju zadataka, neovisno o intervenciji. Međutim, učenici s konceptualnom, ali ne i proceduralnom uputom, bili su uspješniji u rješavanju zadataka o neproporcionalnom odnosu u usporedbi s kontrolnom skupinom, neovisno o točnosti rješavanja početnog zadatka. Može se stoga pretpostaviti da je konceptualna uputa doprinijela u nadogradnji *mindwarea* učenika i potaknula uvid u razlike između proporcionalnosti i neproporcionalnosti, i to u nešto većoj mjeri od proceduralne upute.

Rezultati ovog istraživanja sugeriraju da je produktivna pogreška obećavajuća metoda za smanjenje pristranog korištenja modela proporcionalnosti. Međutim, potrebno je modificirati način primjene produktivne pogreške koji smo implementirali u naše istraživanje, i to tako da primjena bude dužeg trajanja. Učinak bi, možda, bio bolji da produktivnu pogrešku provodi nastavnik u okviru redovne nastave matematike. Nadalje, za smanjenje površnog učenja i poticanje povezivanja informacija (Hattie, 2009), kao i za bolje razumijevanje pristranosti (Thompson i Morsanyi, 2012), važno je djelovati na metakogniciju. Stoga ćemo se u nastavku usmjeriti na analizu metakognitivnog osjećaja točnosti, kao važnog čimbenika u razumijevanju procesa rezoniranja.

5.3.2. Metakognitivni osjećaj točnosti

Sukladno hipotezi 3.4, naše istraživanje pokazalo je da su učenici imali veći osjećaj točnosti kada su brže odgovorili na zadatak, nego ako im je trebalo više vremena da odgovore na zadatak, i to u situaciji s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska. Ovaj rezultat sukladan je ranije provedenim istraživanjima iz područja meta-rezoniranja (npr. Shynkaruk i Thompson, 2006; Thompson i sur., 2011) te sugerira da je brža, a time vjerojatno i lakša, obrada informacija povezana s većim osjećajem točnosti. Prema modelu smanjivanja kriterija (Ackerman, 2014; Ackerman i Thompson, 2017), kod složenijih zadataka, kao što je bio slučaj u našem istraživanju, negativna korelacija odraz je dvaju različitih procesa. Točnije, u situaciji s vremenskim pritiskom ključni su procesi „od dolje prema gore“, poput fluentnosti odgovora, odnosno lakoće kojom se osoba dosjeti odgovora na zadatak. Stoga možemo zaključiti da su u našem istraživanju učenici koji su imali veću fluentnost odgovora, imali i veći FOR, što je sukladno pretpostavkama ovog modela.

Nadalje, prema modelu smanjivanja kriterija (Ackerman, 2014), u situaciji bez vremenskog pritiska važniji su procesi „od gore prema dolje“ (npr. uvjerenja pojedinca). Naime, kada se osoba ne dosjeti brzo nekog odgovora, traži zadovoljavajući odgovor sve dok ima vremena ili motivacije za to, a pritom procjenjuje u kojem je stupnju odgovor

zadovoljavajući na temelju dostignutog osjećaja točnosti. Dakle, smatra se da i drugi osobinski i situacijski čimbenici djeluju na formiranje osjećaja točnosti (npr. Frank i Kuhlmann, 2017), a ne isključivo fluentnost odgovora. Sukladno tome, u našem istraživanju korelacija između vremena odgovaranja i osjećaja točnosti bila je niska negativna, što upućuje na djelovanje i drugih procesa, a ne samo brzine odgovaranja na osjećaj točnosti.

Korelacija između vremena odgovaranja i osjećaja točnosti bila je niska i u situaciji s vremenskim pritiskom, što također može biti rezultat djelovanja osobinskih ili situacijskih čimbenika. Pritom je važno naglasiti da vrijeme odgovaranja u našem istraživanju nije uključivalo samo vrijeme rješavanja, nego i vrijeme čitanja zadatka. Moguće je da je upravo zbog toga u našem istraživanju korelacija između vremena odgovaranja i osjećaja točnosti bila niska. Slične rezultate pokazalo je i istraživanje Thompson i suradnika (2011), koji su koristili zajedničko vrijeme čitanja i rješavanja, kao i silogizme. Točnije, Thompson i suradnici (2011) ustanovili su da je FOR bio veći, ne samo kod bržih odgovora, nego i kod konkluzija koje su prihvaćene u odnosu na one odbijene. To pokazuje važnost osobinskih činitelja, a ne samo fluentnost odgovora. Možemo stoga primijetiti da se i u našem istraživanju u zadacima iz područja (ne)proporcionalnosti i matematičkog rezoniranja pokazuje da je fluentnost odgovora samo jedna od determinantni osjećaja točnosti.

U analizi odnosa između vremena odgovaranja i osjećaja točnosti nismo računali odvojeno korelaciju za zadatke o proporcionalnom odnosu i zadatke o neproporcionalnom odnosu pa jedan od čimbenika koji je mogao doprinijeti prethodno navedenoj niskoj negativnoj korelaciji može biti i vrsta zadatka. Naime, kao što je pretpostavljeno u hipotezi 3.3, učenici su imali veći osjećaj točnosti u zadacima o proporcionalnom nego u zadacima o neproporcionalnom odnosu, i u situaciji s vremenskim pritiskom i u situaciji bez vremenskog pritiska. U ranijim istraživanjima pokazalo se da je osjećaj točnosti veći kada su točni odgovori intuitivni nego neintuitivni (Simmons i Nelson, 2006), što je potvrđeno i u našem istraživanju. Nadalje, kada sudionici mogu upotrijebiti svoje znanje kako bi rezonirali o zadacima, oni imaju veći osjećaj točnosti nego kada su zadaci nepoznati (Shynkaruk i Thompson, 2006). U istraživanju Putarek i Vlahović-Štetić (2019) pokazalo se da učenici zadatke o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu procjenjuju podjednako poznatima, ali da zadatke o neproporcionalnom odnosu procjenjuju težima. Budući da su metakognitivni osjećaji međusobno u umjerenim korelacijama (npr. Efklides i sur., 1999), moguće je da učenici, iako ih percipiraju podjednako poznatima, uočavaju da su zadaci o neproporcionalnom odnosu teži pa procjenjuju i da su manje sigurni u točnost svojih odgovora. Upravo je ova razlika u osjećaju točnosti između zadataka o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu mogla dovesti do

prethodno spomenute niske korelacije između vremena odgovaranja i osjećaja točnosti. Naime, prilikom određivanja korelacije između vremena odgovaranja i osjećaja točnosti nismo razmatrali odvojeno zadatke o proporcionalnom i zadatke o neproporcionalnom odnosu. Budući da postoje razlike u osjećaju točnosti između ove dvije vrste zadataka, uzimanje u analizu obje vrste zadataka zajedno moglo je smanjiti korelaciju između vremena odgovaranja i osjećaja točnosti.

Međutim, osjećaj točnosti i u situaciji s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska bio je oko sredine ljestvice za odgovore ili malo iznad sredine, i kod zadataka o proporcionalnom odnosu, koje su učenici u pravilu točno riješili, i kod zadataka o neproporcionalnom odnosu, koje su učenici u pravilu netočno riješili. Dakle, razlika u osjećaju točnosti bila je mala pa bi važnost vrste zadatka kao determinante osjećaja točnosti trebalo dodatno ispitati, i to tako da se koristi veći broj zadataka, što bi omogućilo veći varijabilitet i odvojenu provedbu analiza za svaku vrstu zadataka.

Nadalje, relativna točnost u našem istraživanju bila je niska. Točnije, učenici su imali veći osjećaj točnosti kod točno riješenih zadataka i kod odgovaranja s vremenskim pritiskom i kod odgovaranja bez vremenskog pritiska, što pokazuje da su razlikovali točno i netočno riješene zadatke, ali je vrijednost korelacije između osjećaja točnosti i normativne točnosti bila mala. Naše istraživanje u skladu je s istraživanjima u kojima su korišteni silogizmi (Bajšanski i sur., 2014; Shynkaruk i Thompson, 2006) te pokazuje da ni srednjoškolci dobro ne razlikuju točno i netočno riješene zadatke u području (ne)proporcionalnih odnosa, te da osjećaj točnosti nije uvijek sukladan normativnoj točnosti. Međutim, budući da smo i u određivanju relativne točnosti uzeli zajedno i zadatke o proporcionalnom i o neproporcionalnom odnosu, moguće je da niska relativna točnost proizlazi iz lošeg razlikovanja točno i netočno riješenih zadataka o neproporcionalnom odnosu. Naime, kao što je ranije spomenuto, osjećaj točnosti bio je visok u zadacima o neproporcionalnom odnosu koje su učenici u pravilu netočno riješili.

Sukladno hipotezi 3.3, učenici su imali veći osjećaj točnosti kada su odgovarali bez vremenskog pritiska, nego kada su odgovarali s vremenskim pritiskom. Porast osjećaja točnosti u drugom odgovaranju, u odnosu na prvo odgovaranje, zabilježen je i u ranijim istraživanjima (npr. Ackerman, 2014; Shynkaruk i Thompson, 2006; Thompson i sur., 2011). Veći osjećaj točnosti u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska mogao bi biti rezultat porasta broja točnih odgovora u zadacima o neproporcionalnom odnosu, ali ovo se objašnjenje nije pokazalo točnim u našem istraživanju. Naime, osjećaj točnosti podjednako je porastao u situacijama u kojima je odgovor promijenjen i nije promijenjen. Nadalje, osjećaj točnosti porastao je i u zadacima o proporcionalnom odnosu, u kojima nije došlo do promjene broja točnih odgovora

između prvog i drugog odgovaranja. Stoga se može pretpostaviti da je osjećaj točnosti porastao neovisno o promjenama u točnosti odgovora, što su pokazala i ranija istraživanja (Shynkaruk i Thompson, 2006). Kao što Shynkaruk i Thompson (2006) sugeriraju, moguće je da promjena u osjećaju točnosti odražava uvjerenja sudionika o odnosu između vremena i točnosti, odnosno, što više vremena osoba utroši u razmišljanje, veća je vjerojatnost da je odgovor točan, pa je time osoba i sigurnija da je točno odgovorila na zadatak. Upravo uvjerenja pojedinca o odnosu između vremena utrošenog na odgovaranje i osjećaja točnosti mogu, također, predstavljati jednu od determinantni osjećaja točnosti i djelomično objasniti nisku korelaciju između vremena odgovaranja i osjećaja točnosti.

5.3.3. Odgovor „nijedno od ponuđenoga“

Kako bismo smanjili mogućnost pogađanja, u istraživanju je korišten odgovor „nijedno od ponuđenoga“. Ovaj odgovor ujedno je omogućio učenicima da ne odaberu nijedan od odgovora ako nisu sigurni koji odgovor je točan, čime je bio sličan odgovoru „ne znam“, koji je korišten u istraživanjima Ackerman (2014, eksperimenti 4 i 5). U tim istraživanjima sudionici nisu procjenjivali osjećaj točnosti kada su odabrali odgovor „ne znam“ te se pokazalo da je osjećaj točnosti u prosjeku bio veći kada je postojala opcija „ne znam“, nego kada su morali odabrati neki od ponuđenih odgovora. U našem istraživanju učenici su procjenjivali osjećaj točnosti za odgovor „nijedno od ponuđenoga“, a rezultati sugeriraju da učenici nisu birali odgovor „nijedno od ponuđenoga“ po slučaju, već su razmatrali odgovore i odlučili se za opciju „nijedno od ponuđenoga“ jer vjerojatno nisu mogli generirati odgovor koji bi bio zadovoljavajući, što je sukladno istraživanju provedenom u području iluzije proporcionalnosti (Putarek i Vlahović-Štetić, 2019).

Naime, u zadacima o proporcionalnom i neproporcionalnom odnosu vrijeme odgovaranja nije se razlikovalo ovisno o odabranom odgovoru. U situaciji bez vremenskog pritiska u zadacima o neproporcionalnom odnosu vrijeme odgovaranja bilo je duže kada su učenici odabrali odgovor „nijedno od ponuđenoga“ u odnosu na ostale odgovore. Iako vrijeme odgovaranja ne pokazuje nužno brzinu i lakoću procesiranja informacija (Baayen i Milin, 2015; Houlihan, Campbell i Stelmack, 1994), možemo pretpostaviti da, kada bi učenici birali odgovor „nijedno od ponuđenoga“ po slučaju (npr. nisu koncentrirani ni motivirani za rješavanje zadataka), vrijeme odgovaranja bilo bi kraće za odgovor „nijedno od ponuđenoga“ nego za točne odgovore. Nadalje, osjećaj točnosti za odgovor „nijedno od ponuđenoga“ bio je podjednak kao i za točne odgovore, i kod zadataka o proporcionalnom i kod zadataka o

neproporcionalnom odnosu. Kod zadatka o neproporcionalnom odnosu osjećaj točnosti bio je podjednak i za distraktore i za odgovor „nijedno od ponuđenoga“.

Uzimajući u obzir i vrijeme odgovaranja i navedene rezultate o osjećaju točnosti, možemo zaključiti da je naša hipoteza 4.1 djelomično potvrđena. Nadalje, možemo pretpostaviti da su učenici koji su odabrali odgovor „nijedno od ponuđenoga“, zapravo zaključili da prva dva prikazana odgovora (točan odgovor i distraktor) nisu točna rješenja na zadatke, što može biti odraz njihovog nezadovoljavajućeg matematičkog znanja i time nedovoljno salijentne sheme proporcionalnosti. Međutim, analize u kojima je uspoređivan odgovor „nijedno od ponuđenoga“ s ostalim ponuđenim odgovorima provedene su na malom dijelu uzorka koji je odabrao barem jednom točan odgovor, barem jednom distraktor i barem jednom odgovor „nijedno od ponuđenoga“. Kada uzmemo u obzir sve učenike koji su odabrali odgovor „nijedno od ponuđenoga“, uočava se da je osjećaj točnosti najmanje izražen kada su učenici odabrali upravo ovaj odgovor (tablica 5 u Rezultatima). Stoga bi bilo korisno povećati broj zadataka i njihov varijabilitet kako bi se povećao broj učenika koji će odabrati različite ponuđene odgovore, a time će i provedene usporedbe biti pouzdanije.

5.3.4. Detekcija konflikta

Usprkos velikom broju netočnih odgovora i izraženom osjećaju točnosti u zadacima o neproporcionalnom odnosu, istraživanje je pokazalo da su učenici detektirali konflikt između heurističkog odgovora i logičkih/matematičkih principa i u situaciji s vremenskim pritiskom i u situaciji bez vremenskog pritiska. Točnije, sukladno hipotezi 4.2, učenici su imali manji osjećaj točnosti kada su odabrali odgovor sukladan heuristiku proporcionalnosti u zadacima o neproporcionalnom odnosu, nego kada su odabrali točan odgovor u zadacima o proporcionalnom odnosu. Ovaj rezultat sukladan je istraživanju provedenom na zadacima vezanima uz (ne)proporcionalnost u kojem nije bilo vremenskog pritiska za rješavanje zadataka (Putarek i Vlahović-Štetić, 2019). Osim toga, rezultati našeg istraživanja sukladni su istraživanjima provedenima u području probabilističkog rezoniranja i donošenja odluka u kojima je postojao vremenski pritisak za rješavanje zadataka (Bago i De Neys, 2019), kao i istraživanjima u kojima nije bilo vremenskog pritiska za rješavanje zadataka (npr. De Neys i Glumicic, 2008). Zbog pogrešaka u inhibiciji heuristika, detekcija konflikta često završi neuspješno (De Neys, 2010). U području iluzije proporcionalnosti, heuristik proporcionalnosti možda nije inhibiran zbog nedovoljnog matematičkog znanja učenika, a time i nedostatka alternativnih shema, pomoću kojih bi procesiranje Tipa 2 zamijenilo intuitivni odgovor

procesiranja Tipa 1 i koje bi pomogle u razlikovanju proporcionalnosti i neproporcionalnosti, (Putarek i Vlahović-Štetić, 2019).

Uz sve navedeno, ovo je istraživanje pokazalo da učenici, i kada su pod vremenskim pritiskom, mogu detektirati konflikt, čak i ako ostaju pri početno odabranim odgovorima prilikom drugog odgovaranja. Dakle, čak i u situacijama u kojima je odgovor procesiranja Tipa 1 dominantan i znatno su ograničene mogućnosti procesiranja Tipa 2 da analizira odgovor procesiranja Tipa 1, kao što je u situaciji s vremenskim pritiskom (De Neys, 2006a), osjećaj točnosti za odgovor sukladan heuristiku proporcionalnosti koji je normativno točan (kao u zadacima o proporcionalnom odnosu) razlikuje se od osjećaja točnosti za odgovor koji je također sukladan heuristiku proporcionalnosti, ali je normativno netočan (kao u zadacima o neproporcionalnom odnosu). Ovaj rezultat sukladan je rezultatima istraživanja Baga i suradnika (2018) o mogućnosti detekcije konflikta u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom. Nadalje, ovaj rezultat sukladan je istraživanju Newmana i suradnika (2017), prema kojem se procesiranje Tipa 2 može aktivirati i u situaciji s vremenskim pritiskom. Naime, upravo se na temelju navedenih razlika u osjećajima točnosti u situaciji s vremenskim pritiskom može pretpostaviti da brza aktivacija procesiranja Tipa 1 i Tipa 2 omogućuje detekciju konflikta, ali vremenski pritisak smanjuje mogućnost za inhibiciju odgovora utemeljenog na heuristicima, a ne smanjuje mogućnost detekcije konflikta jer je detekcija konflikta kognitivno i vremenski nezahtjevna (Franssens i De Neys, 2009). Međutim, ovo istraživanje ne isključuje mogućnost postojanja intuitivne logike (Bago i De Neys, 2017, 2019; De Neys, 2012; Pennycook i sur., 2015), ali s obzirom na izostanak vremenskog ograničenja, ne možemo biti sigurni da su početni odgovori bili uistinu prvi odgovori koji su pali učenicima na pamet.

Učenici su bili podjednako sigurni u točnost odgovora koji je sukladan heuristiku proporcionalnosti u zadacima o neproporcionalnom odnosu i onog odgovora koji je bio točan u zadacima o neproporcionalnom odnosu. Međutim, učenici su bili manje sigurni u točne odgovore u zadacima o neproporcionalnom odnosu nego u točne odgovore u zadacima o proporcionalnom odnosu. Ovaj rezultat sukladan je ranijim istraživanjima provedenima na zadacima vezanima uz (ne)proporcionalnost (Putarek i Vlahović-Štetić, 2019), ali nije u skladu s istraživanjem De Neys i suradnika (2011), u kojem je osjećaj točnosti za točne odgovore u zadacima o proporcionalnom odnosu i točne odgovore u zadacima o neproporcionalnom odnosu bio podjednak. Moguće je da razlike u našim rezultatima proizlaze iz razlika u korištenim zadacima. Naime, De Neys i suradnici (2011) koristili su zadatke koji su se odnosili na pogrešku konjunkcije i zadatke osnovne razine, a zadaci o (ne)proporcionalnosti su poput tipičnih matematičkih problemskih zadataka koje učenici obično procjenjuju težima od

računskih zadataka i rješavaju ih manje uspješno (Sepeng i Madzorera, 2014; Vlahović-Štetić, 1996). Stoga su kod zadataka o neproporcionalnom odnosu, koji su učenicima teži (Putarek i Vlahović-Štetić, 2019), uvjerenja o problemskih zadacima i iskustva u rješavanju istih, mogla djelovati kao proces „od gore prema dolje“ na formiranje manjeg osjećaja točnosti. Kao što Ackerman (2014) predlaže u modelu smanjivanja kriterija, na osjećaj točnosti mogu djelovati i procesi „od dolje prema gore“ pa je tako moguće je da su učenici imali manji osjećaj točnosti za točne odgovore u zadacima o neproporcionalnom odnosu, nego za točne odgovore u zadacima o proporcionalnom odnosu jer je fluentnost odgovora (tj. lakoća kojom odgovor padne na pamet) bila manja. Naime, učenici su trebali „nadvladati“ i inhibirati intuitivni odgovor kako bi točno odgovori na zadatke o neproporcionalnom odnosu, što nije bilo potrebno kod zadataka o proporcionalnom odnosu.

Podjednak osjećaj točnosti za odgovore, koji su normativno točni i odgovore koji su sukladni heuristiku proporcionalnosti u zadacima o neproporcionalnom odnosu, može biti odraz traženja točnog odgovora kod učenika koji su na kraju odabrali odgovor sukladan heuristiku proporcionalnosti, ali za razliku od učenika koji su točno odgovorili na zadatak o neproporcionalnom odnosu, ovi učenici nisu pronašli alternativnu shemu, barem ne u vremenu koji su bili spremni izdvojiti za rješavanje zadatka.

Važno je napomenuti da na temelju vremena odgovaranja ne možemo zaključiti da je konflikt detektiran, čime hipoteza 4.3 nije potvrđena. Naime, učenici su podjednako dugo rješavali zadatke kada su točno odgovorili na zadatke o proporcionalnom i zadatke o neproporcionalnom odnosu te isto tako kada su odabrali odgovor sukladan heuristiku proporcionalnosti u zadacima o neproporcionalnom odnosu. Budući da vrijeme odgovaranja nije pouzdan pokazatelj procesiranja informacija (Baayen i Milin, 2015; Houlihan i sur., 1994), naši rezultati o vremenu odgovaranja ne opovrgavaju detekciju konflikta, ali sugeriraju da je potrebno provesti istraživanja u kojima će na precizniji način biti određene brzina odgovaranja i brzina procesiranja informacija.

5.3.5. FOR i pokazatelji procesiranja Tipa 2

Jedan od pokazatelja procesiranja Tipa 2 je normativna točnost odgovora. Na temelju pretpostavki teorije metakognitivnog rezoniranja očekuje se da će manji FOR biti povezan s većom točnosti odgovaranja u situaciji bez vremenskog pritiska jer će FOR potaknuti dublje analitičko procesiranje Tipa 2, koji će dovesti do racionalnih i normativno točnih odgovora (Thompson, 2009). Suprotno pretpostavkama ove teorije, istraživanja su pokazala da su FOR i

normativna točnost kod odgovaranja bez vremenskog pritiska u niskoj pozitivnoj korelaciji (Thompson i sur., 2011) ili statistički neznačajnoj korelaciji (Thompson i sur., 2013). Rezultati našeg istraživanja sukladni su navedenim istraživanjima, koja su provedena u području silogističkog i probabilističkog rezoniranja. Naime, kod zadataka o proporcionalnom odnosu FOR je bio veći kada je u situaciji bez vremenskog pritiska odabran točan odgovor. Kod zadataka o neproporcionalnom odnosu nije bilo razlike u FOR-u ovisno o točnosti odabranog odgovora u situaciji bez vremenskog pritiska.

Normativna točnost ne smatra se pouzdanim pokazateljem procesiranja Tipa 2 jer sudionici često dodatno vrijeme iskoriste za racionalizaciju, a ne za dubinsku analizu početnog odgovora (Elqayam i Evans, 2011). Sukladno tome, u našem istraživanju korelacija između vremena odgovaranja u situaciji bez vremenskog pritiska i broja točnih odgovora bila je vrlo niska pozitivna ili nulta. Pretpostavlja se stoga da procesiranje Tipa 2 uključuje serijalnu asocijativnu kogniciju koja nije utemeljena na hipotetskom i logičnom rezoniranju te ne uključuje procese razdvajanja (Stanovich, 2009).

Međutim, kada se uzme u obzir točnost odgovaranja u situaciji s vremenskim pritiskom, uočava se da su učenici koji imaju veći FOR točniji u rješavanju zadataka bez vremenskog pritiska, ali samo ako su bili uspješni u rješavanju zadataka u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom. Visok FOR povezan je s manjom točnosti prilikom rješavanja zadataka bez vremenskog pritiska, ako su učenici bili neuspješni u rješavanju zadataka u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom. Može se stoga pretpostaviti da normativna točnost barem djelomično odražava procesiranje Tipa 2 te da je prilikom razmatranja odnosa između FOR-a i normativne točnosti kod odgovaranja bez vremenskog pritiska potrebno uzeti u obzir točnost rješavanja zadataka u situaciji s vremenskim pritiskom ili znanje osobe u nekom području. Moguće da osobe koje točnije rješavaju zadatke u situaciji s vremenskim pritiskom imaju manje salijentan heurističan odgovor procesiranja Tipa 1 u odnosu na logičan odgovor procesiranja Tipa 1, i taj logičan odgovor procesiranja Tipa 1 samo treba potvrditi procesiranje Tipa 2. Nizak FOR kod ove skupine može onda rezultirati preispitivanjem početnog odgovora koji je bio točan i njegovom promjenom. Osobe koje su podložnije intuitivnom odgovoru procesiranja Tipa 1, a time i imaju više netočnih odgovora u situaciji s vremenskim pritiskom, nizak FOR može potaknuti na preispitivanje netočnog odgovora i njegovu promjenu u točan odgovor. Stoga se može zaključiti da je FOR važna determinanta normativne točnosti odgovora u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska, ali je prilikom razmatranju odnosa između FOR-a i normativne točnosti odgovora u situaciji odgovaranja bez vremenskog pritiska važno uzeti u obzir točnost početnog odgovora.

Drugi pokazatelj procesiranja Tipa 2 je promjena odgovora u situaciji bez vremenskog pritiska u odnosu na odgovor u situaciji s vremenskim pritiskom. U ranijim istraživanjima uočeno je da sudionici ostaju kod svojeg početnog odgovora u oko 70-80% slučajeva, odnosno, često nisu spremni promijeniti svoj odgovor prilikom rješavanja silogizama (Bajšanski i Žauhar, 2019; Shynkaruk i Thompson, 2006; Thompson i sur., 2011). Ova istraživanja pokazuju i da je korelacija između broja promjena odgovora i vremena rješavanja zadataka prilikom drugog odgovaranja niska i statistički neznačajna, odnosno, sudionici koji mijenjaju odgovore ulažu vrijeme u rješavanje zadataka prilikom drugog odgovaranja na zadatke kao i sudionici koji ostaju kod svojeg početnog odgovora. U našem istraživanju oko 60% učenika promijenilo je barem jednom svoj odgovor u zadacima o proporcionalnom odnosu, odnosno oko 70% učenika promijenilo je svoj odgovor u zadacima o neproporcionalnom odnosu. Dakle, učenici su bili spremniji promijeniti odgovor nego u ranijim istraživanjima provedenima u području silogističkog rezoniranja. Međutim, prosječan broj promjena bio je mali te je kroz svih 10 zadataka iznosio dvije-tri promjene. I u zadacima o proporcionalnom i u zadacima o neproporcionalnom odnosu najviše promjena bilo je iz distraktora u točan odgovor, što sugerira da se prilikom promjene odgovora aktivira dublja i analitička razina procesiranja Tipa 2, kojom se generiraju normativno točni odgovori.

Sukladno teoriji metakognitivnog rezoniranja (Thompson, 2009) i hipotezi 5, što je bio manji FOR, učenici su bili spremniji promijeniti svoj odgovor u situaciji bez vremenskog pritiska. Kao što navedena teorija pretpostavlja, metakognitivna iskustva, zajedno s procesima „od gore prema dolje“, važna su determinantna procesiranja Tipa 2 jer pokazuju lakoću kojom osoba dolazi do odgovora, a time i moguću težinu kognitivnog procesiranja i potrebu za dubljom analizom početnog odgovora od strane procesiranja Tipa 2.

Dodatno se pokazalo da promjena odgovora ovisi i o točnosti odgovora prilikom odgovaranja s vremenskim pritiskom. Kod zadataka o proporcionalnom odnosu, učenici su bili manje spremni promijeniti odgovor ako su točno odgovorili na zadatak/zadatke u situaciji s vremenskim pritiskom, dok su kod zadataka o neproporcionalnom odnosu bili manje spremni promijeniti odgovor ako su netočno odgovorili na zadatak/zadatke. Budući da je najviše netočnih odgovora u zadacima o neproporcionalnom odnosu bilo sukladno heuristiku proporcionalnosti, a točni odgovori u zadacima o proporcionalnom odnosu su bili, također, odgovori sukladni heuristiku proporcionalnosti, možemo pretpostaviti da su intuitivni odgovori salijentni i da mogu dovesti do kognitivne rigidnosti te manje spremnosti za promjenu odgovora. U prilog tome govore i ranije prikazani rezultati o primjeni produktivne pogreške. Naime, najviše učenika, koji su se nalazili u kategoriji kognitivne rigidnosti i nisu bili spremni

prihvatiti da je njihov odgovor u početnom zadatku netočan, bili su upravo oni učenici koji su odgovorili na početni zadatak sukladno heuristiku proporcionalnosti.

Treći pokazatelj procesiranja Tipa 2 je vrijeme odgovaranja u situaciji bez vremenskog pritiska. Kao što ranija istraživanja pokazuju (npr. Thompson i sur., 2011) i hipoteza 5 pretpostavlja, u našem istraživanju učenici su uz manji FOR duže odgovarali na zadatke u situaciji bez vremenskog pritiska, a korelacije su bile umjerene veličine. Može se zaključiti da se i u području matematičkog rezoniranja može primijeniti teorija metakognitivnog rezoniranja, koja nam može pomoći u razumijevanju pogrešaka i pristranosti koje učenici čine u matematici u području (ne)proporcionalnosti.

5.4. Posttest: iluzija proporcionalnosti i matematičke kompetencije učenika

U posttestu ispitivali smo proceduralno i konceptualno znanje učenika istim zadacima kao u predtestu, koji se, kao što je ranije spomenuto, i inače koriste za ispitivanje ovih matematičkih kompetencija (Canobi, 2004; Rittle-Johnson i Schneider, 2015; Siegler i Stern, 1998). Dakle, kako bismo provjerili njihovo proceduralno znanje, učenici su rješavali isti zadatak o proporcionalnom odnosu i isti zadatak o neproporcionalnom odnosu kao u predtestu. U posttestu je broj točnih rješenja bio podjednak u zadatku o proporcionalnom odnosu kao i u predtestu (oko 93% točnih rješenja), ali je broj bodova koji su učenici mogli dobiti po zadatku (od nula do tri boda) porastao. Budući da smo kod navedenog bodovanja uzeli u obzir, ne samo točnost rješenja, nego i postupak i točnost slijeđenja modela proporcionalnosti u zadatku o proporcionalnom odnosu, možemo pretpostaviti da je porastao broj učenika koji su imali točan postupak i/ili broj učenika koji su slijedili model proporcionalnosti. Naime, analizom korištenih postupaka, uočava se da su dva najčešća postupka i u predtestu i posttestu bili postupci prikazani u školskim udžbenicima (Golac-Jakopović i sur., 2014), odnosno, određivanje koliko puta je drugi promjer veći od prvoga (tj. određivanje koeficijenta k) te rješavanje uz pomoć razmjera u koji su učenici uvrštavali veličinu promjera i broj svijeća. Međutim, broj netočnih postupka (npr. navođenje da je drugi stol dvostruko veći pa da treba dvostruko više svijeća) smanjio se u posttestu u odnosu na predtest.

U zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu broj točnih rješenja porastao je u posttestu, u odnosu na predtest, s 29% na 50%, a broj bodova porastao je više nego u zadatku o proporcionalnom odnosu. Za razliku od predtesta, u kojem su učenici ovaj zadatak najčešće rješavali određivanjem koliko je puta drugi promjer veći od prvoga (tj. određivanje koeficijenta k), što predstavlja pogrešan postupak, u posttestu je najčešći postupak bilo računanje razmjera

površina i broja svijeća. Broj točnih odgovora u ovom zadatku bio je manji nego u zadatku o proporcionalnom odnosu. Međutim, učenici su imali podjednak broj točnih i netočnih odgovora te je najčešći netočan odgovor bio odgovor sukladan heuristiku proporcionalnosti. Budući da smo u okviru hipoteze 6.1 pretpostavili da će učenici u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu imati više točnih odgovora nego odgovora sukladnih modelu proporcionalnosti i drugih netočnih odgovora, ova hipoteza djelomično je potvrđena. Nadalje, primjećuje se da je broj učenika koji nije bio podložan iluziji proporcionalnosti u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu bio veći nego što je broj učenika koji je bio podložan iluziji proporcionalnosti. Dakle, uradak i rezoniranje o neproporcionalnosti poboljšali su se. Može se stoga zaključiti da je broj učenika koji je uvidio da se u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu treba upotrijebiti površina, a ne opseg, porastao, što može biti posljedica ponovljenog rješavanja istog zadatka iz predtesta, koji je primijenjen dva tjedna prije, i samostalnog dolaska do konceptualne promjene, ili izloženosti produktivnoj pogrešci i rješavanju zadataka na računalima.

Učenici koji su bili izloženi produktivnoj pogreški i učenici u kontrolnim skupinama nisu se razlikovali u rješavanju zadataka u posttestu, u odnosu na predtest, te u transferu, čime hipoteza 6.2 nije potvrđena. Istraživanja u području iluzije proporcionalnosti pokazala su da je ovu pristranost u matematičkom rezoniranju vrlo teško promijeniti i većina intervencija, koje su tome bile namijenjene, nije uspjela ili su imale kontra-efekte, poput smanjene točnosti rješavanja zadataka o proporcionalnom odnosu (npr. De Bock, Verschaffel i Janssens, 2002; Van Dooren i sur., 2004). U našem istraživanju primijenjena intervencija (tj. produktivna pogreška) nije imala kontra-efekte i rezultirala je malim kratkoročnim, ali ne i dugoriočnim poboljšanjem rješavanja zadataka o neproporcionalnom odnosu. Kao što je ranije spomenuto, bilo bi korisno modificirati produktivnu pogrešku primijenjenu u našem istraživanju kako bi se njezini pozitivni učinci u području iluzije proporcionalnosti mogli bolje istražiti. Naime, učinak produktivne pogreške kratkoročno je imao pozitivan učinak, pa bi uz modifikaciju korištene produktivne pogreške možda mogao imati i dugoročne pozitivne učinke. Do sada provedena istraživanja o učinkovitosti produktivne pogreške pokazala su poboljšanje matematičkih kompetencija u posttestu, ali produktivnu pogrešku obično je primjenjivao nastavnik na nastavi matematike, a posttest je bio primijenjen odmah nakon primjene produktivne pogreške ili dan nakon te primjene (Kapur, 2012, 2014). Moguće je stoga da je učinak produktivne pogreške kratkoročan i ne očituje se tjedan dana nakon njezine primjene ili da je poučavanje na nastavnom satu od strane nastavnika čimbenik koji je ključan za učinkovitost produktivne pogreške.

Nadalje, kod skupina izloženih produktivnoj pogrešci, ali ne i kod skupina koje joj nisu bile izložene, može se na temelju uspješnijeg rješavanja zadataka o neproporcionalnom odnosu na računalima predvidjeti povećanje uspješnosti rješavanja zadatka o neproporcionalnom kvadratnom odnosu u posttestu u usporedbi s predtestom, i u situaciji s vremenskim pritiskom i u situaciji bez vremenskog pritiska. Osim toga, i kod skupina izloženih produktivnoj pogrešci i kod skupina koje joj nisu bile izložene, uspješnije rješavanje zadataka o neproporcionalnom odnosu u situaciji bez vremenskog pritiska pozitivno je predvidjelo transfer u posttestu. Važno je pritom napomenuti da su veličine regresijskih koeficijenta bile vrlo male te da su se i zadaci o neproporcionalnom odnosu tijekom rješavanja zadataka na računalima odnosili na neproporcionalni kvadratni odnos. Može se pretpostaviti da su učenici, koji su kroz produktivnu pogrešku imali veće povećanje *mindwarea*, nastavili primjenjivati svoje znanje i u posttestu, iako se u prosjeku skupine izložene produktivnoj pogrešci i kontrolne skupine nisu razlikovale.

U posttestu smo za procjenu transfera (tj. mogućnosti učenika da točno riješe zadatak s kojim se do tada u istraživanju nisu susreli) koristili i zadatak o neproporcionalnom kubičnom odnosu. Samo oko 30% učenika točno je riješilo ovaj zadatak te su učenici, sukladno hipotezi 6.1, bili manje uspješni u rješavanju zadatka o neproporcionalnom kubičnom odnosu, u odnosu na zadatak o proporcionalnom odnosu i neproporcionalnom kvadratnom odnosu. Osim toga, učenici su bili podložni iluziji proporcionalnosti i najčešće su rješavali zadatak postupcima sukladnima modelu proporcionalnosti, a dio njih je primijenio i model neproporcionalnosti sukladan kvadratnom odnosu. Skupine izložene produktivnoj pogrešci i one koje joj nisu bile izložene nisu se razlikovale u broju bodova u ovom zadatku, a jedino se na temelju uspješnosti rješavanja zadataka o neproporcionalnom (kvadratnom) odnosu tijekom rješavanja zadataka na računalima mogla predvidjeti uspješnost rješavanja zadatka o neproporcionalnom kubičnom odnosu u posttestu te je veličina regresijskog koeficijenta bila mala do umjerena.

Posljedično se može zaključiti da učenici nisu napravili transfer znanja iz produktivne pogreške na rješavanje zadatka o neproporcionalnom kubičnom odnosu, a neki su učenici nekritički primijenili znanje o neproporcionalnom kvadratnom odnosu, čime hipoteza 6.2 nije potvrđena. Rezultati sugeriraju da bolje matematičko rezoniranje, definirano kroz uspješnije rješavanje zadataka o neproporcionalnom kvadratnom odnosu, predviđa uspješnije rješavanje zadataka koji se odnose i na druge tipove neproporcionalnih odnosa.

U zadatku koji je ispitivao implicitno konceptualno znanje kroz određivanje sličnosti i razlika između sva tri zadatka koje su učenici rješavali u posttestu, manje učenika navodilo je odgovore koje se odnose na površna obilježja zadataka u odnosu na predtest, a više odgovora

koji se odnose na dublje razine procesiranja informacija, poput referiranja na postupak ili razumijevanje zadataka. U posttestu, za razliku od predtesta, učenici su trebali usporediti tri zadatka od kojih je jedan bio tekstualno potpuno različit od ostala dva zadatka. Posljedično, kao što ranije spomenuta literatura o strukturalnom poravnanju (Gentner i Markman, 1994, 1997; Kurtz i sur., 2001; Markman, 1996) navodi, kada su zadaci vrlo različiti, u većoj se mjeri uočavaju razlike među zadacima koje nisu povezane sa zajedničkim obilježjima, dok se kod sličnih zadataka u najvećoj mjeri razmatraju i zajednička obilježja i razlike povezane s tim obilježjima. Upravo je naglašavanje razlika, koje nisu povezane sa sličnostima, moglo potaknuti i dublje razine procesiranja informacija. U predtestu su sličnosti između dva zadatka bile naglašene, ali su bile tekstualne i površne, a kada su površne sličnosti vrlo izražene, učenici se oslanjaju na ta površna obilježja. To je u predtestu moglo potaknuti oslanjanje na sličnosti i razlike povezane s tim površnim sličnostima (Gentner i Markman, 1994, 1997; Reed i sur., 2012).

Broj odgovora u pojedinim kategorijama nije se razlikovao ovisno o izloženosti produktivnoj pogrešci. Stoga se uočeni trend povećanja odgovora iz dubljih razina procesiranja informacija može pripisati prethodno opisanom dodavanju zadataka o neproporcionalnom kubičnom odnosu u posttestu u odnosu na predtest. Osim toga, budući da su korišteni zadaci na osnovnoškolskoj razini (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2006, 2011), učenicima su vjerojatno bili poznati pa su oni naknadno samostalno mogli doći do uvida, i tijekom ponovne izloženosti istim zadacima u posttestu, navoditi odgovore iz dubljih razina procesiranja.

Kao i u predtestu, kod druge implicitne mjere učenici su najčešće točno navodili koje pojmove predstavljaju pojedini dijelovi teksta, i to neovisno o tome jesu li primijenili to znanje prilikom rješavanja zadataka. Može se stoga primijetiti da učenici nisu povezali znanje koje posjeduju o matematičkim pojmovima s rješavanjem zadataka, što se kao i kod predtesta može povezati s površnim pristupom učenju (Braš Roth i sur., 2017; Garašić i sur., 2018; Bregvadze i Jokić, 2013).

Sukladno ranijim istraživanjima, mjere proceduralnog i konceptualnog znanja bile su povezane i u našem istraživanju (npr. Schneider i sur., 2011). Naime, učenici koji su bili točniji u rješavanju zadataka o neproporcionalnom kvadratnom i kubičnom odnosu navodili su više odgovora iz dubljih razina procesiranja informacija u zadatku uspoređivanja i imali su više bodova u zadatku određivanja pojmova. Pritom je, za razliku od predtesta, u posttestu određivanje sličnosti, a ne samo razlika, bilo povezano s proceduralnim znanjem učenika operacionaliziranim kao točnost rješavanja zadataka o neproporcionalnom odnosu. Ova povezanost vjerojatno je rezultat povećanja odgovora iz dubljih razina procesiranja prilikom

određivanja sličnosti, a time i povećanja varijabiliteta. Kao i u predtestu, rješavanje zadatka o proporcionalnom odnosu nije bilo povezano s navođenjem sličnosti i razlika, što se ponovno može objasniti automatiziranošću modela proporcionalnosti (Bock i sur., 2007; Gillard i sur., 2009b), pa se bez dubljeg razumijevanja zadatka može kroz točan postupak doći do točnog rješenja.

Učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom kvadratnom odnosu najčešće su kroz postupak računali površinu stola, a učenici koji su točno riješili zadatak o neproporcionalnom kubičnom odnosu najčešće su računali volumen bazena. Osim toga, učenici koji su računali površinu ili volumen najčešće su u zadatku o proporcionalnom odnosu računali opseg (80.8% učenika koji su računali opseg stola u zadatku o proporcionalnom odnosu, računalo je i površinu stola u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu, a 54.7% učenika koji su računali opseg stola u zadatku o proporcionalnom odnosu, računalo je i volumen u zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu). Može se primijetiti da su u posttestu, kao i u predtestu, učenici koji su točno riješili zadatke o neproporcionalnom odnosu uočili da rub i ploha predstavljaju opseg i površinu, a bazen pun vode predstavlja volumen, te su razumjeli razliku između tri zadatka. Za ovakvu analizu potrebna je dublja aktivacija procesiranja Tipa 2 (De Neys i Glumicic, 2008; Putarek i Vlahović-Štetić, 2019), što se onda manifestiralo i u dubljim razinama odgovora u zadatku procjene konceptualnog znanja (tj. zadatku navođenja koje matematičke pojmove predstavljaju rub i gornja ploha stola te bazen).

5.5. Praktične implikacije

Kao i u ranijim istraživanjima, poput PISA-e (Braš Roth i sur., 2017), rezultati našeg istraživanja sugeriraju da su učenici skloni površnom razmišljanju i lošijem povezivanju informacija stečenih tijekom obrazovanja, odnosno da adaptivna stručnost učenika nije dobro razvijena. U PISA istraživanjima uočava se da hrvatski petnaestogodišnjaci u području matematičkih kompetencija, u prosjeku, mogu izvršiti jasno opisane postupke, odabrati i primijeniti jednostavne strategije za rješavanje problema, proizvesti kratke iskaze te izvijestiti o svojim interpretacijama, rezultatima i zaključcima, no samo mali broj učenika može povezivati informacije, promišljati o svojim postupcima i vrednovati ih te pokazati dubinsko razumijevanje sadržaja (Braš Roth i sur., 2017). Razlozi za površni pristup učenju, a moguće i površnim odgovorima u našem istraživanju, mogu se pronaći u obilježjima hrvatskog obrazovnog sustava. Naime, kurikulum opterećen velikim brojem činjenica potiče primjenu tehnika poučavanja kojima se u pravilu samo prenose činjenice, uz malo ili nikakvo poticanje

međusobnog povezivanja tih činjenica i njihovo vrednovanje ili analizu (Braš Roth i sur., 2017; Garašić, Radanović i Lukša, 2018; Bregvadze i Jokić, 2013). Osim toga, više hrvatskih učitelja predmetne nastave i srednjoškolskih nastavnika navodi da se slaže s pristupom usmjerenim na nastavu (npr. prijenos činjeničnih informacija kroz izravno poučavanje), s kojim su se i sami više susretali tijekom obrazovanja, nego s pristupom usmjerenim na učenika (npr. korištenje tehnike rasprave) (Vizek Vidović, 2005). Posljedično, učenici imaju fragmentirano znanje koje ne mogu primijeniti, a ponekad ga ne uspijevaju ni usvojiti bez dodatnih instrukcija (Bregvadze i Jokić, 2013).

Stoga bi bilo korisno u poučavanje ugraditi konstruktivističke principe, poput rasprava i uvažavanja učeničkog predznanja, te poticati naprednije strategije učenja, poput elaboracije i rješavanja problema. Time bi učenici stekli dublje razumijevanje gradiva i postupaka te bi poboljšali svoje matematičke kompetencije. Pristup koji se, također, pokazao korisnim za poboljšanje matematičkih kompetencija je produktivna pogreška (npr. Kapur, 2012), koja se u našem istraživanju pokazala korisnom i za smanjenje pristranosti u matematičkom rezoniranju. Osim što su bili manje skloni oslanjanju na intuitivne, ali normativno netočne odgovore, učenici su u našem istraživanju tijekom izloženosti produktivnoj pogrešci samostalno došli do uvida zašto je njihov odgovor, sukladan heuristiku proporcionalnosti, netočan u zadatku o neproporcionalnom odnosu. Nastavnici bi stoga tijekom poučavanja mogli tražiti od učenika da sami riješe zadatke i suoče se sa svojim krivim predznanjem ili nedovoljno usvojenim gradivom. Usporedba različitih pojmova ili postupaka, također, bi mogla pospješiti konceptualnu promjenu i unaprijediti matematičke kompetencije učenika. Pritom bi bilo korisno da nastavnici ne prepuste učenicima cijeli proces otkrivanja točnih rješenja i usvajanje postupaka ili pojmova, već da im u tom procesu budu potpora, i to kroz raspravu, prijenos osnovnih pojmova i poticanje razmišljanje o njima.

Nadalje, u našem su se istraživanju metakognitivna iskustva pokazala važnom determinantom dubljeg procesiranja informacija. Metakognitivna iskustva ovise o fluentnosti procesiranja informacija, ali i o uvjerenjima o obradi informacija, motivaciji te vlastitim kriterijima o zadovoljavajućoj razini metakognitivnih iskustava da se neki odgovor prihvati kao konačan (Ackerman i Thompson, 2017). Stoga je kroz obrazovni sustav preporučljivo poticati kod učenika svjesnost o važnosti metakognicije za razne kognitivne procese: učenje, donošenje odluka i rezoniranje općenito. Primjerice, nastavnici ili školski psiholozi mogu poučiti učenike da njihov osjećaj da je odgovor točan ne ukazuje uvijek na to da je on uistinu točan, kao i da je korisno razmisliti o svojem početnom odgovoru. Pritom učenici mogu pokušati generirati što više različitih postupaka i rješenja za zadatak te ih evaluirati. Time mogu osvijestiti i razlike u

osjećaju točnosti ovisno o svakome od postupaka i rješenja. Nastavnici bi mogli osobito naglasiti u kojim se područjima najviše uočavaju pristranosti o matematičkom rezoniranju te da u njima metakognitivna iskustva najvjerojatnije mogu rezultirati pogrešnim odgovorom. Nadgledanje procesa rješavanja zadataka i otkrivanje u kojim koracima učenik (najčešće) nailazi na teškoće može pomoći učenicima da te teškoće pravovremeno uklone i usvoje prikladne strategije rješavanja problema. Poboljšanjem metakognicije moglo bi se potaknuti, ne samo dublje procesiranje informacija, nego i postignuće u matematici i općenito, s obzirom na visoku veličinu učinka koju metakognicija ima na školski uspjeh (Hattie i Donoghue, 2016; Schneider i Alert, 2010).

Budući da se kod učenika povećavaju interes te percipirana važnost i korisnost područja u kojima uočavaju da su kompetentni (Wigfield, Tonks i Klauda, 2009), poboljšanje matematičkih kompetencija i metakognicije moglo bi povećati i motivaciju učenika za učenje matematike, a time i za STEM područje. To je, kao što je navedeno na početku ovog rada, jedan od osnovnih obrazovnih ciljeva diljem svijeta (Caprile i sur., 2015), uključujući i Hrvatsku (Narodne novine, 2014).

5.6. Ograničenja istraživanja

Sudionici ovog istraživanja bili su učenici samo drugih i trećih razreda općih i jezičnih gimnazija, pa se rezultati ne mogu generalizirati na učenike drugih gimnazija ili strukovnih škola, kao i na druge dobne uzraste.

Nadalje, iz organizacijskih razloga, odnosno kako bi se ispitivanje moglo provesti unutar jednog školskog sata za svaku od tri točke, u istraživanju je korišten samo po jedan zadatak o proporcionalnom i o neproporcionalnom odnosu u predtestu za procjenu proceduralnog znanja te jedan zadatak za procjenu transfera, kao i dvije slične mjere implicitnog konceptualnog znanja, bez procjene eksplicitnog konceptualnog znanja. Osim toga, u istraživanju je korišteno samo pet zadataka o proporcionalnom i pet zadataka o neproporcionalnom odnosu. U budućim istraživanjima bilo bi korisno povećati broj korištenih zadataka, kako bi zaključci bili pouzdaniji te kako bi se povećao varijabilitet, a time i mogućnosti provedbe statističkih analiza, poput izračuna pojedinih varijabli na razini svakog sudionika (npr. korelacija između vremena odgovaranja i točnosti u našem istraživanju kod dijela učenika nije mogla biti izračunata jer su imali sve točne ili sve pogrešne odgovore).

Iako su ispitivači nadzirali proces rješavanja zadataka, moguće je da su neki učenici prepisali samo odgovore od svojih kolega, što je moglo narušiti odnose između ispitivanih

varijabli. Između pojedinih točaka proteklo je oko tjedan dana pa je moguće da su učenici u tom razdoblju ipak na nastavi matematike učili sadržaje koji su mogli djelovati na rješavanje zadataka u istraživanju. Isto su tako mogli s kolegama komentirati zadatke i zbog njihovog utjecaja promijeniti rješavanje zadataka, bez dubljeg razumijevanja modela neproporcionalnosti.

Vrijeme odgovaranja procijenjeno je preko zajedničkog vremena čitanja i rješavanja zadataka pa nemamo točnu procjenu trajanja rješavanja zadataka, a ne možemo ni sa sigurnošću tvrditi da su učenici za vrijeme čitanja/rješavanja zadataka uistinu čitali, odnosno rješavali zadatke. Kako bi se dobila bolja procjena koliko učenici razmišljaju tijekom rješavanja zadataka, u budućim bi se istraživanjima mogle koristiti metode poput pomičnog prozora (De Neys i Glumicic, 2008).

Budući da se mogućnost inhibicije odgovora smatra važnijom od opće inteligencije za manju podložnost pristranostima u rezoniranju (Stanovich i West, 2008), bilo bi korisno ispitati koje sve varijable mogu djelovati na povećanje inhibicije heuristika proporcionalnosti (npr. radno pamćenje, kognitivni stilovi, motivacija). Osim toga, kao što je više puta spomenuto u Raspravi, trebalo bi provjeriti kako produktivna pogreška primijenjena od strane nastavnika na nastavi matematike, u kombinaciji s primjenom usporedbi, djeluje na matematičko rezoniranje u području iluzije proporcionalnosti.

Za detaljniju provjeru postavki modela smanjivanja kriterija bilo bi korisno primijeniti metodologiju poput one koju je primijenila Ackerman (2014) u svojim istraživanjima. Točnije, učenici bi trebali procjenjivati osjećaj točnosti više puta tijekom procesa rješavanja zadataka, a ne samo jednom, nakon davanja konačnog odgovora.

6. ZAKLJUČAK

Cilj istraživanja bio je provjeriti postavke teorija dualnih procesa i meta-rezoniranja u području matematičkog rezoniranja o proporcionalnosti i neproporcionalnosti kod učenika drugog i trećeg razreda srednje škole te ispitati može li se produktivnom pogreškom smanjiti iluzija proporcionalnosti.

U predtestu je potvrđena hipoteza 1, odnosno učenici su bili uspješniji u rješavanju zadatka o proporcionalnom odnosu u odnosu na zadatak o neproporcionalnom odnosu. Osim toga, više učenika bilo je podložno iluziji proporcionalnosti u zadatku o neproporcionalnom odnosu u predtestu (sukladno hipotezi 1) i u zadatku o neproporcionalnom odnosu u okviru produktivne pogreške (sukladno hipotezi 2), nego što ih nije bilo podložno iluziji proporcionalnosti.

Nadalje, od hipoteza u okviru trećeg istraživačkog problema potvrđene su hipoteze 3.1, 3.3 i 3.4. Točnije, učenici su u svim skupinama (kontrolna skupina, skupina izložena proceduralnoj uputi i skupina izložena konceptualnoj uputi) imali podjednak broj točnih odgovora u zadacima o proporcionalnom odnosu te je broj točnih odgovora u zadacima o proporcionalnom odnosu u svim skupinama bio podjednak u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska (hipoteza 3.1). Učenici su u svim skupinama imali izraženiji osjećaj točnosti kod odgovaranja bez vremenskog pritiska, nego kod odgovaranja s vremenskim pritiskom te u zadacima o proporcionalnom odnosu, nego u zadacima o neproporcionalnom odnosu (hipoteza 3.2). Sukladno modelu smanjivanja kriterija (Ackerman, 2014), korelacija između osjećaja točnosti i vremena rješavanja zadataka bila je negativna. Dakle, učenici koji su brže odgovarali na zadatak imali su izraženiji osjećaj točnosti, i u situaciji s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska (hipoteza 3.3). Hipoteza 3.2 djelomično je potvrđena: učenici u skupinama s proceduralnom i konceptualnom uputom imali su više točnih odgovora u zadacima o neproporcionalnom odnosu od kontrolne skupine, i u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom i u situaciji bez vremenskog pritiska. Pritom nije bilo razlika u točnosti rješavanja zadataka o neproporcionalnom odnosu između skupina s proceduralnom i konceptualnom uputom. Sukladno hipotezi 3.2 učenici u skupinama s proceduralnom i konceptualnom uputom u situaciji bez vremenskog pritiska nisu bili podložni iluziji. Dakle, rezultati istraživanja pokazuju da su učenici podložni iluziji proporcionalnosti, ali da se kroz kratkoročnu intervenciju u obliku produktivne pogreške može promijeniti ova pristranost u matematičkom rezoniranju.

Učenici su imali podjednak FOR i FJC kada su odabrali odgovor „nijedno od ponuđenoga“ kao i kada su odabrali točan odgovor i distraktor, i u zadacima o proporcionalnom odnosu i u zadacima o neproporcionalnom odnosu. Stoga nije potvrđena hipoteza 4.1 o nižem FOR-i u FJC-u kada je odabran odgovor „nijedno od ponuđenoga“ u odnosu na FOR i FJC kada su odabrani točan odgovor i distraktor. Osim toga, vrijeme odgovaranja kada je odabran odgovor „nijedno od ponuđenoga“ nije se razlikovalo u odnosu na vrijeme odgovaranja kada su odabrani točan odgovor i distraktor, što, također, nije sukladno hipotezi 4.1. Razlika u vremenu odgovaranja između ponuđenih odgovora pronađena je jedino kod zadataka o neproporcionalnom odnosu u situaciji bez vremenskog pritiska, i ta razlika odgovarala je hipotezi 4.1. Točnije, vrijeme odgovaranja u svim je skupinama bilo duže kada su učenici odabrali odgovor „nijedno od ponuđenoga“ u odnosu na točne odgovore i distraktore. Može se zaključiti da učenici nisu birali odgovor „nijedno od ponuđenoga“ po slučaju. Osim toga, može se pretpostaviti da su učenici zaključili da točan odgovor i distraktor nisu točna rješenja za zadatke, što može biti odraz njihovog nezadovoljavajućeg matematičkog znanja i time nedovoljno salijentnog modela proporcionalnosti.

Kod učenika se uočava detekcija konflikta, mjerena preko metakognitivnog osjećaja točnosti. Točnije, učenici su imali veći metakognitivni osjećaj točnosti za točne odgovore u zadacima o proporcionalnom odnosu nego za točne odgovore i distraktore u zadacima o neproporcionalnom odnosu. Navedena razlika u metakognitivnom osjećaju točnosti pokazala se i u situaciji odgovaranja s vremenskim pritiskom i bez vremenskog pritiska. Time je potvrđena hipoteza 4.2. Može se zaključiti da je iluzija proporcionalnosti, kao i druge pristranosti u rezoniranju, rezultat loše inhibicije salijentnih heurističnih odgovora, a ne lošeg nadziranja kognitivnih procesa i izostanka detekcije konflikta. Nadalje, učenici su podjednako brzo odgovarali kada su odabrali točan odgovor u zadacima o proporcionalnom odnosu te točan odgovor i distraktor u zadacima o neproporcionalnom odnosu, i u situaciji s vremenskim pritiskom i u situaciji bez vremenskog pritiska. Kod učenika stoga nije pronađena detekcija konflikta mjerena preko vremena odgovaranja i hipoteza 4.3 nije potvrđena.

Postavke teorije metakognitivnog rezoniranja (Thompson, 2009) potvrđene su i u području matematičkog rezoniranja. Naime, metakognitivni osjećaj točnosti pokazao se važnom determinantom procesiranja Tipa 2, operacionaliziranom preko promjene odgovora i vremena odgovaranja. Dakle, učenici manjeg osjeća točnosti prilikom prvog odgovaranja na zadatke bili su spremniji promijeniti svoj odgovor prilikom drugog odgovaranja i pritom su duže rješavali zadatke. Time smo potvrdili hipotezu 5. Osim toga, metakognitivni osjećaj točnosti bio je povezan s točnosti rješavanja zadataka sukladno pretpostavkama ove teorije, ali

samo kod učenika koji su bili neuspješni u rješavanju zadataka prilikom prvog rješavanja zadataka.

Hipoteza 6.1 djelomično je potvrđena. Sukladno ovoj hipotezi, u posttestu učenici su bili uspješniji u rješavanju zadatka o proporcionalnom odnosu, u odnosu na zadatak o neproporcionalnom kvadratnom i zadatak o neproporcionalnom kubičnom odnosu. Osim toga, u zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu imali su više netočnih nego točnih odgovora te je od netočnih odgovora bilo najviše onih odgovora koji su sukladni proporcionalnosti. Međutim, iako smo pretpostavili da će učenici u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu imati više točnih odgovora, nego netočnih odgovora (tj. odgovora sukladnih proporcionalnosti i drugih netočnih odgovora), pokazalo se da su učenici imali podjednak broj točnih i netočnih odgovora. Konačno, učenici su u skupinama s proceduralnom i konceptualnom uputom imali, ne samo podjednak broj točnih odgovora u posttestu u zadatku o neproporcionalnom kvadratnom odnosu, nego i podjednak transfer (tj. uspjeh u zadatku o neproporcionalnom kubičnom odnosu) kao i učenici u kontrolnoj skupini. Dakle, učinak produktivne pogreške nije bio dugotrajan, odnosno, on nije djelovao na rješavanje zadataka u posttestu, pa time hipoteza 6.2 nije potvrđena.

7. LITERATURA

Ackerman, R. (2014). The Diminishing Criterion Model for metacognitive regulation of time investment. *Journal of Experimental Psychology: General, 143*(3), 1349–1368. doi: 10.1037/a0035098

Ackerman, R. (2019). Heuristic cues for meta-reasoning judgments: Review and methodology. *Psychological Topics, 28*(1), 1–20. doi: 10.31820/pt.28.1.1

Ackerman, R. i Goldsmith, M. (2011). Metacognitive regulation of text learning: On screen versus on paper. *Journal of Experimental Psychology: Applied, 17*(1), 18–32. doi: 10.1037/a0022086

Ackerman, R. i Lauterman, T. (2012). Taking reading comprehension exams on screen or on paper? A metacognitive analysis of learning texts under time pressure. *Computers in Human Behavior, 28*(5), 1816–1828. doi: 10.1016/j.chb.2012.04.023

Ackerman, R. i Thompson, V. A. (2017). Meta-reasoning: Monitoring and control of thinking and reasoning. *Trends in Cognitive Sciences, 21*(8), 607–617. doi: 10.1016/j.tics.2017.05.004

Alter, A. L. i Oppenheimer, D. M. (2009). Uniting the tribes of fluency to form a metacognitive nation. *Personality and Social Psychology Review, 13*(3), 219–235. doi: 10.1177/1088868309341564

Alter, A. L., Oppenheimer, D. M., Epley, N. i Eyre, R. N. (2007). Overcoming intuition: Metacognitive difficulty activates analytic reasoning. *Journal of Experimental Psychology: General, 136*(4), 569–576. doi: 10.1037/0096-3445.136.4.569

Alibali, M. W. i Goldin-Meadow, S. (1993). Gesture-speech mismatch and mechanisms of learning: What the hands reveal about a child's state of mind. *Cognitive Psychology, 25*, 468–573. doi: 10.1006/cogp.1993.1012

Amsel, E., Klaczynski, P. A., Johnston, A., Bench, S., Close, J., Sadler, E. i Walker, R. (2008). A dual-process account of the development of scientific reasoning: The nature and development of metacognitive intercession skills. *Cognitive Development, 23*(4), 452–471. doi:10.1016/j.cogdev.2008.09.002

Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A. i Wortham, D. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research, 70*, 181–214. doi: 10.3102/00346543070002181

Baayen, R. H. i Milin, P. (2015). Analyzing reaction times. *International Journal of Psychological Research, 3*(2), 12–28. doi: 10.21500/20112084.807

Babarović, T., Pale, P. i Burušić, J. (2018) Učinci STEM intervencijskog programa u osnovnim školama na učeničke stavove, interese i motivaciju: primjena tehnike uparivanja prema sklonosti. *Društvena istraživanja: časopis za opća društvena pitanja, 23*(2), 583–604. doi: 10.5559/di.27.4.01

Bago, B. i De Neys, W. (2017). Fast logic?: Examining the time course assumption of dual process theory. *Cognition, 158*, 90–109. doi:10.1016/j.cognition.2016.10.014

Bago, B. i De Neys, W. (2019). The Smart System 1: evidence for the intuitive nature of correct responding on the bat-and-ball problem. *Thinking & Reasoning, 25*(3), 257–299. doi: 10.1080/13546783.2018.1507949

Bago, B., Freyd, D., Vidal, J., Houdé, O., Borst, G. i De Neys, W. (2018). Fast and slow thinking: Electrophysiological evidence for early conflict sensitivity. *Neuropsychologia, 117*, 483–490. 10.1016/j.neuropsychologia.2018.07.017

Bajšanski, I., Močibob, M. i Valerjev, P. (2014). Metacognitive judgments and syllogistic reasoning. *Psychological Topics, 23*(1), 143–165.

Bajšanski, I. i Žauhar, V. (2019). The relationship between consistency and consensuality in syllogistic reasoning. *Psychological Topics, 28*(1), 73–91. doi: 10.31820/pt.28.1.4

Ball, L. J., Lucas, E. J., Miles, J. N. V. i Gale, A. G. (2003). Inspection times and the selection task: What do eye-movements reveal about relevance effects? *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 56A*(6), 1053–1077. doi: 10.1080/02724980244000729

Ball, L. J., Wade, C. N. i Quayle, J. D. (2006). Effects of belief and logic on syllogistic reasoning. Eye-movement evidence for selective processing models. *Experimental Psychology, 53*(1), 77–86. doi: 10.1027/1618-3169.53.1.77

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and fiexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. U A. J. Baroody i A. Dowker (Ur.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (str. 1–33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A. J. i Dowker, A. (2003). Preface. U A. J. Baroody i A. Dowker (Ur.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (str. xv – xxi). Mahwah. NJ: Erlbaum.

Belenky, D. M. i Nokes-Malach, T. J. (2012). Motivation and transfer: The role of mastery-approach goals in preparation for future learning. *Journal of the Learning Sciences, 21*(3), 399–432. doi: 10.1080/10508406.2011.651232

Benjamin, A. S. i Diaz, M. (2008). Measurement of relative metamnemonic accuracy. U J. Dunlosky & R. A. Bjork (Ur.), *Handbook of memory and metamemory* (str. 73–94). New York: Psychology Press.

Bielaczyc, K., Pirolli, P. L. i Brown, A. L. (1995). Training in self-explanation and self-regulation strategies: Investigating the effects of knowledge acquisition activities on problem solving. *Cognition and Instruction, 13*, 221–252. doi: 10.1207/s1532690xci1302_3

Bonawitz, E., Shafto, P., Gweon, H., Goodman, N. D., Spelke, E. i Schulz, L. (2011). The double-edged sword of pedagogy: Instruction limits spontaneous exploration and discovery. *Cognition, 120*, 322–330. doi: 10.1016/j.cognition.2010.10.001

Bonner, C. i Newell, B. R. (2010). In conflict with ourselves? An investigation of heuristic and analytic processes in decision making. *Memory & Cognition, 38*(2), 186–196. doi: 10.3758/MC.38.2.186

Bregvadze, T. i Jokić, B. (2013). Characteristics of formal education systems and the decision concerning the use of private tutoring services. U B. Jokić (Ur.), *Emerging from the shadow: A comparative qualitative exploration of private tutoring in Eurasia* (str. 71–113). Zagreb: Network of Education Policy Centers (NEPC).

Braš Roth, M., Markočić Dekanić, A. i Markuš Sandrić, M. (2017). *PISA 2015: Prirodoslovne kompetencije za život*. Zagreb: Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja.

Braš Roth, M., Markočić Dekanić, A., Markuš Sandrić, M. i Gregurović, M.(2013). *PISA 2012: Matematičke kompetencije za život*. Zagreb: Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja.

Briars, D. J. i Siegler, R. S. (1984). A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology, 20*, 607-618. doi: 10.1037/0012-1649.20.4.607

Brown, T. A. (2006). *Confirmatory factor analysis for applied research*. New York: The Guilford Press.

Brown, J. S. i Van Lehn, K. (1982). Towards a generative theory of "bugs". U T. P. Carpenter, J. M. Moser i T. A. Romberg (Ur.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (str. 117–135). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bubić, A. i Erceg, N. (2015). Uloga kognitivnih stilova u razumijevanju kognitivnog funkcioniranja pojedinaca. *Suvremena psihologija, 18*(2), 159–174.

Busey, T. A., Tunnicliff, J., Loftus, G. R. i Loftus, E. F. (2000). Accounts of the confidence-Accuracy relation in recognition memory. *Psychonomic Bulletin & Review, 7*, 26–48. doi: 10.3758/BF03210724

Byrnes, J. P. i Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology, 27*, 777–786. doi:10.1037//0012-1649.27.5.777

Byrnes, J. P. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development, 7*, 235–237. doi: 10.1016/0885-2014(92)90013-H

Cacioppo, J. T. i Petty, R. E. (1982). The need for cognition. *Journal of Personality and Social Psychology, 42*, 116–131. doi: 10.1037/0022-3514.42.1.116

Canobi, K. H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development, 19*, 81–93. doi: 10.1016/j.cogdev.2003.10.001

Capon, N. i Kuhn, D. (2004). What's so good about problem-based learning? *Cognition and Instruction, 22*(1), 61–79. doi. 10.1207/s1532690Xci2201_3

Caprile, M., Palmén, R., Sanz, P. i Dente, G. (2015). *Encouraging STEM studies: Labour market situation and comparison of practices targeted at young people in different member states*. Policy Department A: Economic and Scientific Policy; European Parliament. http://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/STUD/2015/542199/IPOL_STU(2015)542199_EN.pdf

Carruthers, P. (2009). An architecture for dual reasoning. U J. St. B. T. Evans i K. Frankish (Ur.), *In two minds: Dual processes and beyond* (str. 33–54). Oxford: Oxford University Press.

Chen, F. F. (2007).Sensitivity of goodness of fit indexes to lack of measurement invariance. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 14*(3), 464–504. doi: 10.1080/10705510701301834

Cheung, G. W. i Rensvold, R. B. (2002). Evaluating goodness-of-fit indexes for testing measurement invariance. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 9*(2), 233–255. doi: 10.1207/S15328007SEM0902_5

Chi, M. T. H., de Leeuw, N., Chiu, M. H. i LaVancher, C. (1994). Eliciting self-explanations improves understanding. *Cognitive Science, 18*, 439–477. doi. 10.1207/s15516709cog1803_3

Chu, F. W., vanMarle, K. i Geary, D. C. (2016). Predicting children's reading and mathematics achievement from early quantitative knowledge and domain-general cognitive abilities. *Frontiers in Psychology, 7*, 1–14. doi: 10.3389/fpsyg.2016.00775

Chowrira, S. G., Smith, K. M., Dubois, P. J. i Roll, I. (2019). DIY productive failure: boosting performance in a large undergraduate biology course. *NPJ Science Learning, 4*(1), 1–8. doi: s41539-019-0040-6

Christenson, S. L., Reschly, A. L. i Wylie, C. (2012). Epilogue. U S. L. Christenson, A. L., Reschly i C. Wylie (Ur.), *Handbook of research on student engagement* (str. 813–817). New York, NY, US: Springer + Business Media. doi: 10.1007/978-1-4614-2018-7_8

Clark, R. E. (2009). How much and what type of guidance is optimal for learning from instruction? U S. Tobias i T. M. Duffy (Ur.), *Constructivist instruction: Success or failure* (str. 158–183). New York: Routledge.

Clifford, M. M. (1979). Effects of failure: Alternative explanations and possible implications. *Educational Psychologist, 14*(1), 44–52. doi: 10.1080/00461527909529206

Clifford, M. M. (1984). Thoughts on a theory of constructive failure. *Educational Psychologist, 19*(2), 108–120. doi: 10.1080/00461528409529286

Collins, A. (2012). What is the most effective way to teach problem solving? A commentary on productive failure as a method of teaching. *Instructional Science, 40*(4), 731–735. doi: 10.1007/s11251-012-9234-5

Colliver, J. (2000). Effectiveness of problem-based learning curricula: Research and theory. *Academic Medicine, 75*(3), 259–266. doi: 10.1097/00001888-200003000-00017

Corbin, J., McElroy, T. i Black, C. (2010). Memory reflected in our decisions: Higher working memory capacity predicts greater bias in risky choice. *Judgment and Decision Making, 5*(2), 110–115.

Cowan, R. i Renton, M. (1996). Do they know what they are doing? Children's use of economical addition strategies and knowledge of commutativity. *Educational Psychology, 16*, 407–420. doi: 10.1080/0144341960160405

Dakić, B. i Elezović, N. (2014a). *Matematika 1* (prvo i drugo polugodište). Zagreb: Element.

Dakić, B. i Elezović, N. (2014b). *Matematika 2* (prvo i drugo polugodište). Zagreb: Element.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. i Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students'errors. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 311–334. doi: 10.1023/A:1021205413749

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. i Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. Berlin: Springer.

De Bock, D., Verschaffel, L. i Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving lenght and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 65–83. doi: 10.1023/A:1003151011999

De Bock, D., Verschaffel, L. i Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning, 4*(1), 65–89. doi: 10.1207/S15327833MTL0401_3

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W. i Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction, 13*(4), 441–463. doi:10.1016/S0959-4752(02)00040-3

DeCaro, M. S. i Rittle-Johnson, B. (2012). Exploring mathematics problems prepares children to learn from instruction. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*(4), 552–568. doi: 10.1016/j.jecp.2012.06.009

De Martino, B., Kumaran, D., Seymour, B. i Dolan, R. J. (2006). Frames, biases, and rational decision-making in the human brain. *Science, 313*, 684–687. doi: 10.1126/science.1128356

Denes-Raj, V. i Epstein, S. (1994). Conflict between experiential and rational processing: When people behave against their better judgment. *Journal of Personality and Social Psychology, 66*, 819–829. doi: 10.1037//0022-3514.66.5.819

De Neys, W. (2006a). Automatic–heuristic and executive–analytic processing during reasoning: Chronometric and dual-task considerations *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 59(*6), 1070–1100. doi: 10.1080/02724980543000123

De Neys, W. (2006b). Dual processing in reasoning: Two systems but one reasoner. *Psychological Science, 17*(5), 428-433. doi: 10.1111/j.1467-9280.2006.01723.x

De Neys, W. (2010). Heuristic bias, conflict, and rationality in decision-making. U B. M. Glatzeder, V. Goel. i A. Müller (Ur.), *Towards a theory of thinking* (str. 22–33). Berlin: Springer-Verlag.

De Neys, W. (2012). Bias and conflict: A case for logical intuitions. *Perspectives on Psychological Science, 7*(1) 28–38. doi:10.1177/1745691611429354

De Neys, W. (2014) Conflict detection, dual processes, and logical intuitions: Some clarifications. *Thinking & Reasoning, 20*(2), 169–187. doi:10.1080/13546783.2013. 854725

De Neys, W., Cromheeke, S. i Osman, M. (2011). Biased but in doubt: Conflict and decision confidence. *PLoS ONE, 6*(1), e15954. doi: 10.1371/ journal.pone.0015954

De Neys, W. i Glumicic, T. (2008). Conflict monitoring in dual process theories of thinking. *Cognition, 106*(3), 1248–1299. doi: 10.1016/j.cognition.2007.06.002

De Neys, W., Moyens, E. i Vansteenwegen, D. (2010). Feeling we're biased: Autonomic arousal and reasoning conflict. *Cognitive, Affective, & Behavioral Neuroscience, 10*(2), 208–216. doi: 10.3758/CABN.10.2.208

De Neys, W. i Pennycook, G. (2019). Logic, fast and slow: Advances in dual-process theorizing. *Current Directions in Psychological Science*. doi: 10.1177/0963721419855658

De Neys, W., Vartanian, O. i Goel, V. (2008). Smarter than we think: When our brains detect that we are biased. *Psychological Science, 19*(5), 483–489. doi: 10.1111/j.1467-9280.2008.02113.x

diSessa, A. A. (2006). A history of conceptual change research: Threads and fault lines. U R. K. Sawyer (Ur.), *The Cambridge handbook of: The learning sciences* (str. 265–281). New York, NY, US: Cambridge University Press.

Dixon, J. A. i Moore, C. F. (1996). The development of intuitive principles in choosing mathematical strategies. *Developmental Psychology, 32*, 241-253. doi: 10.1037/0012-1649.32.2.241

Dochy, F., Segers, M. S. R., van den Bossche, P. G. i Gijbels, D. (2003). Effects of problem-based learning: A meta-analysis. *Learning and Instruction, 13*(5), 533–568. doi: 10.1016/S0959- 4752(02)00025-7

Draženović-Žitko, V., Krnić, L., Marić, M. i Šikić, Z. (2014). *Matematika 6: udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za šesti razred osnovne škole* (prvo i drugo polugodište). Zagreb: Profil.

Dujmović, M. i Valerjev, P. (2018). The influence of conflict monitoring on meta-reasoning and response times in a base rate task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 71*(12), 2548–2561. doi: 10.1177/1747021817746924

Dunlosky, J. i Hertzog, C. (1998). Training programs to improve learning in later adulthood: Helping older adults educate themselves. U D. J. Hacker (Ur.), *Metacognition in educational theory and practice* (str. 249–275). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Ebersbach, M. i Resing, W. C. M. (2008) Implicit and explicit knowledge of linear and exponential growth in 5- and 9-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 9*(3), 286–309. doi: 10.1080/15248370802247962

Ebersbach, M., Van Dooren, W., Goudriaan, M. N. i Verschaffel, L. (2010) Discriminating non-linearity from linearity: Its cognitive foundations in five-year-olds. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(1), 4–19. doi: 10.1080/10986060903465780

Ebersbach, M. i Wilkening, F. (2007). Children's intuitive mathematics: The development of knowledge about non-linear growth. *Child Development, 78*(1), 296–308. doi. 10.1111/j.1467-8624.2007.00998.x

Erbas, A. K. i Okur, S. (2012). Researching students' strategies, episodes, and metacognitions in mathematical problem solving. *Quality and Quantity, 46*(1), 89–102. doi: 10.1007/s11135-010-9329-5

Efklides, A. (2006). Metacognition and affect: What can metacognitive experiences tell us about the learning process? *Educational Research Review, 1*, 3–14. doi:10.1016/j.edurev.2005.11.001

Efklides, A. (2009). The role of metacognitive experiences in the learning process. *Psicothema, 21*(1), 76–82.

Efklides, A. (2014). How does metacognition contribute to the regulation of learning? An integrative approach. *Psychological Topics 23*(1), 1–30.

Efklides, A., Samara, A., & Petropoulou, M. (1999). Feeling of difficulty: An aspect of monitoring that influences control. *European Journal of Psychology of Education, 14*, 461–476. doi: 10.1007%2FBF03172973

Elliot, A. J., McGregor, H. A. i Gable, S. L. (1999). Achievement goals, study strategies, and exam performance: A mediational analysis. *Journal of Educational Psychology, 91*(3), 549–563. doi. 10.1037/0022-0663.91.3.549

Elqayam, S. i Evans, J. St. B. T. (2011). Subtracting "ought" from "is": Descriptivism versus normativism in the study of human thinking. *Behavioral & Brain Sciences, 34*(5), 233–290. doi: 10.1017/S0140525X1100001X

Epstein, S. (1990). Cognitive-experiential self-theory. U L. A. Pervin (Ur.), *Handbook of personality: Theory and research* (str. 165–192). New York, NY, US: The Guilford Press.

Epstein, S. (1994). Integration of the cognitive and the psychodynamic unconscious. *American Psychologist, 49*(8), 709–724. doi: 10.1037//0003-066X.49.8.709

Epstein, S. (2010). Demystifying intuition: What it is, what it does, and how it does it. *Psychological Inquiry, 21*, 295–312. doi: 10.1080/1047840X.2010.523875

Epstein, S., Pacini, R., Denes-Raj, V. i Heier, H. (1996). Individual differences in intuitive-experiential and analytical-rational thinking styles. *Journal of Personality and Social Psychology, 71*, 390–405. doi: 10.1037/0022-3514.71.2.390

Eryilmaz, A. (2002). Effects of conceptual assignments and conceptual change discussions on students' misconceptions and achievement regarding force and motion. *Journal of Research in Science Teaching, 39*, 1001–1015. doi: 10.1002/tea.10054

Esteley, C. B., Villarreal, M. E. i Alagia, H. R. (2010). The overgeneralization of linear models among university students' mathematical productions: A long-term study. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(1), 86–108. doi:10.1080/ 10986060903465988

European parliament (2018). *Report on modernisation of education in the EU*. Preuzeto s: http://www.europarl.europa.eu/doceo/document/A-8-2018-0173_EN.html

Evans, J. St. B. T. (1996). Deciding before you think: Relevance and reasoning in the selection task. *British Journal of Psychology, 87*(2), 223–240. doi: 10.1111/j.2044-8295.1996.tb02587.x

Evans, J. St. B. T. (2003). In two minds: Dual process accounts of reasoning. *Trends in Cognitive Sciences, 7*(10), 454–459. doi:10.1016/j.tics.2003.08.012

Evans, J. St. B. T. (2006). The heuristic-analytic theory of reasoning: Extension and evaluation. *Psychonomic Bulletin and Review, 13*(3), 378–395. doi: 10.3758/BF03193858

Evans, J. St. B. T. (2007). On the resolution of conflict in dual process theories of reasoning. *Thinking & Reasoning, 13*(4), 321–329. doi: 10.1080/13546780601008825

Evans, J. St. B. T. (2008). Dual-processing accounts of reasoning, judgment, and social cognition. *Annual Review of Psychology, 59*, 255–278. doi: 10.1146/annurev.psych.59.103006.093629

Evans, J. St. B. T. (2009). How many dual-process theories do we need? One, two, or many? U J. St. B. T. Evans i K. Frankish (Ur.), *In two minds: Dual processes and beyond* (str. 33–54). Oxford: Oxford University Press.

Evans, J. St. B. T. (2019). Reflections on reflection: the nature and function of type 2 processes in dual-process theories of reasoning, *Thinking & Reasoning, 25*(4), 383–415. doi: 10.1080/13546783.2019.1623071

Evans, J. St. B. T. i Curtis-Holmes, J. (2005). Rapid responding increases belief bias: Evidence for the dual-process theory of reasoning. *Thinking & Reasoning, 11*(4), 382–389. doi: 10.1080/13546780542000005

Evans, J. St. B. T. i Stanovich, K. E. (2013). Dual-process theories of higher cognition: Advancing the debate. *Perspectives on Psychological Science, 8*(3), 223–241. doi: 10.1177/1745691612460685

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist, 34*, 906–911. doi: 10.1037/0003-066X.34.10.906

Fodor, J. (1983). *The modularity of mind*. Cambridge, MA: MIT Press.

Frank, D. J. i Kuhlmann, B. G. (2017). More than just beliefs: Experience and beliefs jointly contribute to volume effects on metacognitive judgments. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 43*(5), 680–693. doi: 10.1037/xlm0000332

Frankenhuis, W. E. i Ploeger, A. (2007). Evolutionary psychology versus Fodor: Arguments for and against the massive modularity hypothesis. *Philosophical Psychology, 20*(6), 687–710. doi:10.1080/09515080701665904

Frankish, K. i Evans, J. St. B. T. (2009). The duality of mind: An historical perspective. U J. St. B. T. Evans i K. Frankish (Ur.), *In two minds: Dual processes and beyond* (str. 1–30). Oxford: Oxford University Press.

Franssens, S. i De Neys, W. (2009). The effortless nature of conflict detection during thinking. *Thinking & Reasoning, 15*(2), 105–128. doi: 10.1080/13546780802711185

Frederick, S. (2005). Cognitive reflection and decision making. *Journal of Economic perspectives, 19*(4), 25-42. doi: 10.1257/089533005775196732

Fredricks, J. A., Blumenfeld, P. C. i Paris, A. H. (2004). School engagement: Potential of the concept, state of the evidence. *Review of Educational Research, 74*(1), 59–109. doi: 10.3102/00346543074001059

Fritzsche, E., Händel, M. i Kröner, S. (2018). What do second-order judgments tell us about low-performing students' metacognitive awareness?. *Metacognition and Learning, 13*, 159–188. doi: 10.1007/s11409-018-9182-9

Frye, D., Braisby, N., Love, J., Maroudas, C. i Nicholls, J. (1989). Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development, 60*, 1158–1171. doi: 10.2307/1130790

Fyfe, E. R. i Rittle-Johnson, B. (2016). Feedback both helps and hinders learning: The causal role of prior knowledge. *Journal of Educational Psychology, 108*(1), 82–97. doi: 10.1037/edu0000053

Garašić, D., Radanović, I. i Lukša, Ž. (2018). Osvrt na aktualne nastavne programe učenja biologije. *Napredak, 159*(1–2), 159–178.

Geldhof, G. J., Pornprasertmanit, S., Schoemann, A. M. i Little, T. D. (2013). Orthogonalizing through residual centering: Extended applications and caveats. *Educational and Psychological Measurement, 73*(1), 27–46. doi: 10.1177/0013164412445473

Gelman, R. i Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skill. *Cognition, 13*, 343–359. doi: 10.1016/0010-0277(83)90014-8

Gelman, R. i Meck, E. (1986). The notion of principle: The case of counting. U J. Hiebert (Ur.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (str. 29–74). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gentner, D. (2005). The development of relational category knowledge. U D. H. Rakison i L. Gershkoff-Stowe (Ur.), *Building object categories in developmental time* (str. 245–275). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Gentner, D., Loewenstein, J. i Thompson, L. (2003). Learning and transfer: A general role for analogical encoding. *Journal of Educational Psychology*, 95, 393–405. doi: 10.1037/0022-0663.95.2.393

Gentner, D. i Markman, A. B. (1994). Structural alignment in comparison: no difference without similarity. *Psychological Science, 5*(3), 152–158. doi: 10.1111/j.1467-9280.1994.tb00652.x

Gentner, D. i Markman, A. B. (1997). Structure mapping in analogy and similarity. *American Psychologist, 52*(1), 45–56. doi: 10.1037/0003-066X.52.1.45

Gentner, D. i Namy, L. L. (2004). The role of comparison in children's early word learning. U S. R. Waxman i D. G. Hall (Ur.), *Weaving a lexicon* (str. 533–568). Cambridge, MA: MIT Press.

Gick, M. L. i Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology, 15*, 1–38. doi: 10.1016/0010-0285(83)90002-6

Gigerenzer, G. (2008). *Rationality for mortals: Risk and rules of thumb*. New York, NY: Oxford University Press.

Gigerenzer, G. i Gaissmaie, W. (2011). Heuristic decision making. *Annual Review of Psychology, 62*(1), 451–482. doi: 10.1146/annurev-psych-120709-145346

Gijbels. D., Dochy, F., Van den Bossche, P. i Segers, M. (2005). Effects of problem-based learning: A meta-analysis from the angle of assessment. *Review of Educational Research, 75*(1), 27–61, doi: 10.3102/00346543075001027

Gillard, E., Van Dooren, W., Schaeken, W. i Verschaffel, L. (2009a). Dual processes in the psychology of mathematics education and cognitive psychology. *Human Development, 52*(2), 95–108. doi: 10.1159/000202728

Gillard, E., Van Dooren, W., Schaeken, W. i Verschaffel, L. (2009b). Proportional reasoning as a heuristic-based process: Time constraint and dual task considerations. *Experimental Psychology, 56*(2), 92–99. doi: 10.1027/1618-3169.56.2.92

Gilovich, T. i Griffin, D. (2002). Introduction – heuristics and biases: Then and now. U T. Gilovich, D. Griffin i D. Kahneman (Ur.), *Heuristics and biases: The psychology of intuitive judgment* (str. 1–18). New York: Cambrige University Press.

Glasnović Gracin, D. i Burušić, J. (2017). Rasprave o STEM obrazovanju. *Matematika i škola, 90*(4), 206–211.

Glogger-Frey, I., Fleischer, C., Grüny, L., Kappich, J. i Renkl, A. (2015a). Inventing a solution and studying a worked solution prepare differently for learning from direct instruction. *Learning and Instruction, 39*, 72–87. doi: 10.1016/j.learninstruc.2015.05.001

Glogger-Frey, I., Kappich, J., Schwonke, R., Holzäpfel, L., Nückles, M. i Renkl, A. (2015b). Inventing motivates and prepares student teachers for computer-based learning. *Journal of Computer Assisted Learning, 31*(6), 546–561. doi:10.1111/jcal.12097

Golac-Jakopović, I., Krnić, L., Šikić, Z. i Vuković, M. (2014). *Matematika 7: udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za sedmi razred osnovne škole* (prvo i drugo polugodište). Zagreb: Profil.

Goleš, B., Krnić, L., Lobor, Z. i Šikić, Z. (2014). *Matematika 5: udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za peti razred osnovne škole* (prvo i drugo polugodište). Zagreb: Profil.

Gottfried, A. E., Fleming, J. S. i Gottfried, A. W. (2001). Continuity of academic intrinsic motivation from childhood through late adolescence: A longitudinal study. *Journal of Educational Psychology, 93*(1), 3–13. doi: 10.1037/0022-0663.93.1.3

Gottfried, A. E., Marcoulides, G. A., Gottfried, A. W. i Oliver, P. H. (2009). A latent curve model of parental motivational practices and developmental decline in math and science academic intrinsic motivation. *Journal of Educational Psychology, 101*(3), 729–739. doi: 10.1037/a0015084

Haapasalo, L. i Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *JMD—Journal for Mathematic-Didaktik, 21*, 139–157. doi: 10.1007/BF03338914

Halford, G. S. (1993). *Children's understanding: The development of mental models*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hallett, D., Nunes, T. i Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology, 102*, 395–406. doi: 10.1037/a0017486

Hansen, J., Dechene, A. i Wanke, M. (2008). Discrepant fluency increases subjective truth. *Journal of Experimental Social Psychology, 44*, 687–691. doi: 10.1016/j.jesp.2007.04.005

Hardiman, P. T., Dufresne, R. i Mestre, J. E (1989). The relation between problem categorization and problem solving among experts and novices. *Memory & Cognition, 17*, 627-638. doi: 10.3758/BF03197085

Harskamp, E. i Suhre, C. (2007). Schoenfeld's problem solving theory in a student controlled learning environment. *Computers & Education, 49*(3), 822–839. doi:10.1016/j.compedu.2005.11.024

Hatano, G. (2003). Foreword. U A.J. Baroody i A. Dowker (Ur.), *The development of arithmetic concepts and skills* (str. xi–xiii). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hatano, G. i Oura, Y. (2003). Commentary: Reconceptualizing school learning using insight from expertise research. *Educational Researcher, 32*(8), 26–29. doi: 10.3102/0013189X032008026

Hattie, J. A. C. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London, UK: Routledge.

Hattie, J. A. C. i Donoghue, G. M. (2016). Learning strategies: A synthesis and conceptual model. *npj Science of Learning,1*. doi: 10.1038/npjscilearn.2016.13

Hecht, S. A. i Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology, 102*, 843–859. doi: 10.1037/a0019824

Heck, R. H., Thomas, S. L. i Tabata, L. N. (2010). *Quantitative methodology series. Multilevel and longitudinal modeling with IBM SPSS*. New York, NY, US: Routledge/Taylor & Francis Group.

Hedges, L. V. i Hedberg, E. C. (2007). Intraclass correlation values for plan-ning group-randomized trials in education. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 29*(1), 60–87. doi: 10.3102/0162373707299706

Henseler, J. i Chin, W.W. (2010). A comparison of approaches for the analysis of interaction effects between latent variables using partial least squares path modeling. *Structural Equation Modeling, 17*(1), 82–109. doi: 10.1080/10705510903439003

Hidi, S. i Harackiewicz, J. M. (2000). Motivating the academically unmotivated: A critical issue for the 21st century. *Review of educational research, 70*(2), 151–179. doi: 10.3102/00346543070002151

Hieben, J. i Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. U J. Hieben (Ur.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (str. 199–223). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J. i LeFevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. U J. Hiebert (Ur.), Co*nceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (str. 1–28). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hirschfeld, G. i von Brachel, R. (2014). Multiple-group confirmatory factor analysis in R – A tutorial in measurement invariance with continuous and ordinal indicators. *Practical Assessment, Research & Evaluation, 19*(7), 1–12.

Hieben, J. i Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 14*, 251–283. doi: 10.1207/s1532690xci1403_1

Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-based learning: What and how do students learn? *Educational Psychology Review, 16*(3), 235–266. doi: 1040-726X/04/0900-0235/0

Houlihan, M., Campbell, K. i Stelmack, R. M. (1994). Reaction time and movement time as measures of stimulus evaluation and answer processes. *Intelligence, 18*(3), 289–307. doi: 10.1016/0160-2896(94)90031-0

Hoyle, R. H. (2012). Introduction and overview. U R. H. Hoyle (Ur.), *Handbook of structural equation modeling* (str. 3–16). New York: The Guilford Press.

Hu, L. T. i Bentler, P. M. (1999). Cutoff criteria for fit indexes in covariance structure analysis: Conventional criteria versus new alternatives. *Structural Equation Modeling, 6*(1), 1–55. doi: 10.1080/10705519909540118

Hung, D., Chen, V. i Lim, S. H. (2009). Unpacking the hidden efficacies of learning in productive failure. *Learning Inquiry 3*(1), 1–19. doi: 10.1007/s11519-008-0037-1

Ilišević, D. i Krivo, D. (2012). Funkcije u nastavi matematike - motivacijski primjeri iz geologije. *Poučak, 13*(50), 40–49.

Jagodić, B. i Sarapa N. (2007). *Matematika 7*. Zagreb: Školska knjiga.

Johnson, A. (2003). Procedural memory and skill acquisition. U I. B. Weiner (Ur.), *Handbook of Psychology* (str. 499–523). Hoboken, NJ: Wiley.

Jokić, B., Ristić Dedić, Z. Erceg, I., Košutić, I., Kuterovac Jagodić, G., Marušić, I., Matić Bojić, J. i Šabić, J. (2019). *Obrazovanje kao cilj, želja i nada [Education as a goal, wish, and hope]*. Zagreb: Institut za društvena istraživanja u Zagrebu. Preuzeto s: http://www.idi.hr/aspiracije/zi_cobras.pdf

Joyce, A. i Dzoga, M. (2011). *Science, technology, engineering and mathematics education: Overcoming challenges in Europe.* Intel Educator Academy EMEA. ISBN 9789491440144. Preuzeto s: http://www.ingenious-science.eu/c/document_library/get_file?uuid=3252e85a-125c-49c2-a090-eaeb3130737a&groupId=10136

Kahneman, D. i Frederick, S. (2002). Representativeness revisited: Attribute substitution in intuitive judgment. U T. Gilovich, D. Griffin i D. Kahneman (Ur.), *Heuristics and biases: The psychology of intuitive judgment* (str. 49–81). New York: Cambrige University Press.

Kalyuga, S., Chandler, P.A., Sweller, J. i Tuovinen, J. (2001). When problem solving is superior to studying worked examples. *Journal of Educational Psychology, 93*(3), 579–588. doi: 10.1037/0022-0663.93.3.579

Kamata, A. i Bauer, D. J. (2008). A note on the relationship between factor analytic and item response theory models . *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 15*, 136–153 doi:10.1080/10705510701758406

Kapur, M. (2008). Productive failure. *Cognition and Instruction, 26*(3), 379–424. doi: 10.1080/07370000802212669

Kapur, M. (2011). A further study of productive failure in mathematical problem solving: Unpacking the design components. *Instructional Science, 39*(4), 561–579. doi: 10.1007/s11251-010-9144-3

Kapur, M. (2012). Productive failure in learning the concept of variance. *Instructional Science, 40*(4), 651–672. doi: 10.1007/s11251-012-9209-6

Kapur, M. (2014). Productive failure in learning math. *Cognitive Science, 38*(5), 1008–1022. doi: 10.1111/cogs.12107

Kapur, M. (2015a). Learning from productive failure. *Learning: Research and Practice, 1*(1), 51–65. doi: 10.1080/23735082.2015.1002195

Kapur, M. (2015b). The preparatory effects of problem solving versus problem posing on learning from instruction. *Learning and Instruction, 39*, 23–31. doi: 10.1016/j.learninstruc.2015.05.004

Kapur, M. (2016). Examining productive failure, productive success, unproductive failure, and unproductive success in learning, *Educational Psychologist, 51*(2), 289–299. doi: 10.1080/00461520.2016.1155457

Kapur, M. i Bielaczyc, K. (2011). Classroom-based experiments in productive failure. U L.A. Carlson, C. Hölscher i T.F. Shipley (Ur.), *Proceedings of the 33th Annual Conference of the Cognitive Science* Society (str. 2812–2817). Austin, TX: Cognitive Science Society.

Kapur, M. i Bielaczyc, K. (2012). Designing for productive failure. *The Journal of the Learning Sciences, 21*(1), 45–83. doi: 10.1080/10508406.2011.591717

Kapur, M., Dickson, L. i Toh, P. Y. (2008). Productive failure in mathematical problem solving. U B.C. Love, K. McRae i V. M. Sloutsky (Ur.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (str. 1717–1722). Austin, TX: Cognitive Science Society.

Kapur, M., Lee, N. H. i Lee, J. (2017). Eliciting and building upon student-generated solutions: Evidence from Productive Failure. U E. Manalo, Y. Uesaka i C. A. Chinn (Ur.), *Promotion of Students' Spontaneous Use of Effective Learning Strategies* (str. 13–30). Singapore: Routledge.

Kapur, M. i Toh, P. L. L. (2013). Productive failure: From an experimental effect to a learning design. U T. Plomp i N. Nieveen (Ur.), *Educational design research – Part B: Illustrative cases* (str. 341–355). Enschede, the Netherlands: SLO.

Kennedy, T. J. i Odell, M. R. L. (2014). Engaging students In STEM education. *Science Education International, 25*(3), 246–258.

Keren, G. i Schul, Y. (2009). Two is not always better than one: A critical evaluation of two-system theories. *Perspectives on Psychological Science, 4*, 533–550. doi: 10.1111/j.1745-6924.2009.01164.x

Kilpatrick, J., Swafford, J. O. i Findell, B. (Ur.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kirkpatrick, L. A. i Epstein, S. (1992). Cognitive-experiential self-theory and subjective probability: Further evidence for two conceptual systems. *Journal of Personality and Social Psychology, 63*, 534–544. doi: 10.1037//0022-3514.63.4.534

Kirschner, P. A., Sweller, J. i Clark, R. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist, 41*(2), 75–86. doi: 10.1207/s15326985ep4102_1

Kline, R. B. (2011). *Principles and practice of structural equation modeling*. New York: The Guilford Press.

Kline, R. B. (2012). Assumptions in structural equation modeling. U R. H. Hoyle (Ur.), *Handbook of structural equation modeling* (str. 111–125). New York: The Guilford Press.

Kokis, J. V., Macpherson, R., Toplak, M. E., West, R. F., Stanovich, K. E. (2002). Heuristic and analytic processing: Age trends and associations with cognitive ability and cognitive styles. *Journal of Experimental Child Psychology, 83*, 26–52. doi: 10.1016/S0022-0965(02)00121-2

Koriat, A., Bjork, R. A., Sheffer, L. i Bar, S. K. (2004). Predicting one's own forgetting: the role of experience-based and theory-based processes. *Journal of Experimental Psychology: General, 133*, 643–656. doi: 10.1037/0096-3445.133.4.643

Koriat, A. i Levy-Sadot, R. (2000). Conscious and unconscious metacognition: A rejoinder. *Consciousness and Cognition*, 9(2), 193–202. doi:10.1006/ccog.2000.0436

Kozhevnikov, M. (2007). Cognitive styles in the context of modern psychology: Toward an integrated framework of cognitive style. *Psychological Bulletin, 133*, 464–481. doi: 10.1037/0033-2909.133.3.464

Kreft, I. G. G. (1996). *Are multilevel techniques necessary? An overview, including simulation studies*. Unpublished manuscript, California State University at Los Angeles. Preuzeto s: http://www.calstatela.edu/faculty/ikreft/ quarterly.html

Kruger, J. i Dunning, D. (1999). Unskilled and unaware of it: How difficulties in recognizing one's own incompetence lead to inflated self-assessments. *Journal of Personality and Social Psychology, 77*(6), 1121–1134. doi: 10.1037//0022-3514.77.6.1121

Kruglanski, A. W. i Gigerenzer, G. (2011). Intuitive and deliberative judgements are based on common principles. *Psychological Review, 118*, 97–109. doi: 10.1037/a0020762

Kurepa, S. (1989). *Matematička analiza 1: Diferenciranje i integriranje* (prerađeno i prošireno izdanje). Zagreb: Tehnička knjiga.

Kurtz, K., Miao, C.-H. i Gentner, D. (2001). Learning by analogical bootstrapping. *Journal of the Learning Sciences, 10*, 417–446. doi: 10.1207/S15327809JLS1004new_2

LeFevre, J.-A., Smith-Chant, B. L., Fast, L., Skwarchuk, S.-L., Sargla, E., Arnup, J. S., Penner-Wilger, M., Bisanz, J. i Kamawar, D. (2006). What counts as knowing? The development of conceptual and procedural knowledge of counting from kindergarten through Grade 2. *Journal of Experimental Child Psychology, 93*, 285–303. doi:10.1016/j.jecp.2005.11.002

Lerkkanen, M-K., Rasku-Puttonen, H., Aunola, K. i Nurmi, J-E. (2005). Mathematical performance predicts progress in reading comprehension among 7-year olds. *European Journal of Psychology of Education, 20*(2), 121–137. doi: 10.1007/BF03173503

Lieberman, M. D., Jarcho, J. M. i Satpute, A. B. (2004). Evidence-based and intuition-based self-knowledge: An fMRI study. *Journal of Personality and Social Psychology, 87*, 421–435. doi: 10.1037/0022-3514.87.4.421

Little, T. D., Bovaird, J. A. i Widaman, K. F. (2006). On the merits of orthogonalizing powered and product terms: Implications for modeling interactions among latent variables. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 13*, 497–519. doi: 10.1207/s15328007sem1304_1

Loewenstein, J. i Gentner, D. (2001). Spatial mapping in preschoolers: Close comparisons facilitate far mappings. *Journal of Cognition and Development, 2*, 189–219. doi: 10.1207/S15327647JCD0202_4

Loibl, K. i Rummel, N. (2014). Knowing what you don't know makes failure productive. *Learning and Instruction, 34*, 74–85. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.08.004

Lu, Y. (2015). Is experiential-intuitive cognitive style more inclined to err on conjunction fallacy than analytical-rational cognitive style? *Frontiers in Psychology, 6*, 1–8. doi: 10.3389/fpsyg.2015.00085

Loveless, T. (1998). The use and misuse of research in educational reform. U D. Ravitch (Ur.), *Education policy* (str. 285–286). Washington, DC: Brookings Institution Press.

Lowther, J. (2003). *Kvaliteta hrvatskoga formalnog obrazovnog sustava*. Washington: Deloitte Touch Tohmats. Preuzeto s: http://www.ijf.hr/konkurentnost/lowther.pdf

Luttenberger, S., Wimmer, S. i Paechter, M. (2018). Spotlight on math anxiety. *Psychology Research and Behavior Management, 11*, 311–322. doi: 10.2147/PRBM.S141421

MacIntosh R. i Hashim S. (2003). Variance estimation for converting MIMIC model parameters to IRT parameters in DIF analysis. *Applied Psychological Measurement, 27*(5), 372–379. doi: 10.1177/0146621603256021

Markman, A. B. (1996). Structural alignment in similarity and difference judgments. *Psychonomic Bulletin & Review, 3*(2), 227–230. doi: 10.3758/BF03212423

Marsh, L. E., Kanngiesser, P. i Hood, B. (2018). When and how does labour lead to love? The ontogeny and mechanisms of the IKEA effect. *Cognition, 170*, 245–253. doi: 10.1016/j.cognition.2017.10.012

Martin, A. J., Anderson, J., Bobis, J., Way, J. i Vellar, R. (2012). Switching on and switching off in mathematics: An ecological study of future intent and disengagement among middle school students. *Journal of Educational Psychology 104*(1), 1–18. doi: 10.1037/a0025988

Mathan, S. i Koedinger, K. R. (2003). Recasting the feedback debate: Benefits of tutoring error detection and correction skills. U U. Hoppe, F. Verdejo i J. Kay (Ur.), *Artificial intelligence in education: Shaping the future of learning through intelligent technologies, Proceedings of AI-ED Conference* (str. 13–18). Amsterdam: IOS Press.

Matthews, P. G. i Rittle-Johnson, B. (2009). In pursuit of knowledge: comparing self-explanations, concepts, and procedures as pedagogical tools. *Journal of Experimental Child Psychology, 104*, 1–21. doi: 10.1016/j.jecp.2008.08.004

McDonald, C. V. (2016). STEM Education: A review of the contribution of the disciplines of science, technology, engineering and mathematics. *Science Education International, 27*(4), 530–569.

McGregor, H. A. i Elliot, A. J. (2002). Achievement goals as predictors of achievement-relevant processes prior to task engagement. *Journal of Educational Psychology, 94*(2), 381–395. doi: 10.1037/0022-0663.94.2.381

McNeil, N. M. i Alibali, M. W. (2005). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development, 76*, 883–899. doi: 10.1111/j.1467-8624.2005.00884.x

Meade, A. W., Johnson, E. C. i Braddy, P. W. (2008). Power and sensitivity of alternative fit indices in tests of measurement invariance. *Journal of Applied Psychology, 93*(3), 568–592. doi: 10.1037/0021-9010.93.3.568

Meyer, J. H. F. i Land, R. (2006). Threshold concepts and troublesome knowledge: An introduction. U J. H. F. Meyer i R. Land (Ur.), *Overcoming barriers to student understanding: Threshold concepts and troublesome knowledge* (str. 3–18). London, New York: Routledge.

Milfont, T. L. i Fischer, R. (2010). Testing measurement invariance across groups: Applications in cross-cultural research. *International Journal of Psychological Research, 3*(1), 111–121.

Millsap, R. E. i Olivera-Aguilar, M. (2012). Investigating measurement invariance using confirmatory factor analysis. U R. H. Hoyle (Ur.), *Handbook of structural equation modelling* (str. 380–392). New York, NY: Guilford Press.

Millsap, R. E. i Yun-Tein, J. (2004) Assessing factorial invariance in ordered-categorical measures. *Multivariate Behavioral Research, 39*(3), 479–515. doi: 10.1207/S15327906MBR3903_4

Ministarstvo znanosti i obrazovanja (2018). *Strateški plan za razdoblje 2019.-2021*. Preuzeto s: https://mzo.gov.hr/UserDocsImages//dokumenti/PristupInformacijama/Strateski//Strate%C5%A1ki%20plan%20Ministarstva%20znanosti%20i%20obrazovanja%20za%20razdoblje%202019.%20-%202021..pdf

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa (2011). *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje*. Preuzeto s: http://mzos.hr/datoteke/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa (2006). *Nastavni plan i program za osnovnu školu*. Preuzeto s: https://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelji/RM/Nastavni_plan_i_program_za_osnovnu_skolu_-_MZOS_2006_.pdf

Morsanyi, K., McCormack, T i O'Mahony, E. (2018). The link between deductive reasoning and mathematics. *Thinking & Reasoning, 24*(2), 234–257. doi: 10.1080/13546783.2017.1384760

Moustaki, I., Jöreskog, K. G. i Mavridis, D. (2004). Factor models for ordinal variables with covariate effects on the manifest and latent variables: A comparison of LISREL and IRT approaches. *Structural Equation Modeling, 11*(4), 487–513. doi: 10.1207/s15328007sem1104_1

Mueller, M. L., Dunlosky, J. i Tauber, S. K. (2016). The effect of identical word pairs on people's metamemory judgments: What are the contributions of processing fluency and beliefs about memory? *Quarterly Journal of Experimental Psychology: Human Experimental Psychology, 69*, 781–799. doi: 10.1080/17470218.2015.1058404

Musu-Gillette, L. E., Wigfield, A., Harring, J. i Eccles, J. S. (2015). Trajectories of change in student's self-concepts of ability and values in math and college major choice. *Educational Research and Evaluation, 21*(4), 343–370. doi: 10.1080/13803611.2015.1057161

Muthén B. O. i Asparouhov T. (2002). *Latent variable analysis with categorical outcomes: Multiple-group and growth modeling in Mplus*. Preuzeto s: http://statmodel2.com/download/webnotes/CatMGLong.pdf

Myers, N. D., Ahn, S. i Jin, Y. (2011). Sample size and power estimates for a confirmatory factor analytic model in exercise and sport: a Monte Carlo approach. *Research Quarterly for Exercise and Sport, 82*(3), 412–423. doi: 10.5641/027013611X13275191443621

Namy, L. L. i Gentner, D. (2002). Making a silk purse out of two sow's ears: Young children's use of comparison in category learning. *Journal of Experimental Psychology: General, 131*(1), 5-15. doi: 10.1037/0096-3445.131.1.5

Narodne novine (2005). *Strategija znanosti, obrazovanja i tehnologije* (NN 124/2014). Preuzeto s: https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2014_10_124_2364.html

Needham, D. R. i Begg, I. M. (1991). Problem-oriented training promotes spontaneous analogical transfer: Memory-oriented training promotes memory for training. *Memory & Cognition, 19*, 543–557. doi: 10.3758/BF03197150

Nelson, T. O. i Narens, L. (1994). Why investigate metacognition? U J. Metcalfe i A. Shimamura (Ur.), *Metacognition: Knowing about knowing* (str. 1–25). Cambridge, MA: Bradford.

Nemeth, T., Stajčić, G. i Šikić, Z. (2014). *Matematika 8: udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za osmi razred osnovne škole* (prvo i drugo polugodište). Zagreb: Profil.

Neth, H. i Gigerenzer, G. (2015). Heuristics: Tools for an uncertain world. U R. Scott i S. Kosslyn (Ur.), *An interdisciplinary, searchable, and linkable resource* (str. 1–18). New York, NY: Wiley Online Library. doi: 10.1002/9781118900772.etrds0394

Newman, I., Gibb, M. i Thompson, V. A. (2017). Rule-based reasoning is fast and belief-based reasoning can be slow: Challenging current explanations of belief -bias and base-rate neglect. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 43*(7), 1154–1170. doi: 10.1037/xlm0000372

Norman, E. i Furnes, B. (2016). The concept of "metaemotion": What is there to learn from research on metacognition? *Emotion Review, 8*(2), 187–193. doi: 10.1177/1754073914552913

Norman, E., Price, M. C. i Duff, S. (2010). Fringe consciousness: A useful framework for clarifying the nature of experience-based metacognitive feelings. U A. Efklides i P. Misailidi (Ur.), *Trends and prospects in metacognition research* (str. 63–80). New York: Springer.

Norris, P., Pacini, R. i Epstein, S. (1998). *The Rational-Experiential Inventory, short form*. Unpublished inventory. University of Massachusetts at Amherst.

Norton, M. I., Mochon, D. i Ariely, D. (2012). The IKEA effect: When labor leads to love. *Journal of Consumer Psychology, 22*(3), 453–460. doi: 10.1016/j.jcps.2011.08.002

OECD (2016). PISA 2015: Results in focus: OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/aa9237e6-en

OECD (2014). PISA 2012: Results in focus: OECD Publishing. https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf

Oser, F. K., Näpflin, C., Hofer, C. i Aerni, P. (2012). Towards a theory of negative knowledge (NK): Almost-mistakes as drivers of episodic memory amplification. U J. Bauer i C. Harteis (Ur.), *Professional and practice-based learning. Human fallibility* (str. 53–70). Netherlands: Springer. doi: 10.1007/978-90-481-3941-5_4

Osman, M. (2004). An evaluation of dual-process theories of reasoning. *Psychonomic Bulletin & Review, 11*, 988–1010. doi: 10.3758/BF03196730

Pacini, R. i Epstein, S. (1999). The relation of rational and experiential information processing styles to personality, basic beliefs, and the ratio-bias phenomenon. *Journal of Personality and Social Psychology, 76*, 972–987. doi: 10.1037/0022-3514.76.6.972

Pathak, S. A., Kim, B., Jacobson, M. J. i Zhang, B. (2011). Learning the physics of electricity: A qualitative analysis of collaborative processes involved in productive failure. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning, 6*(1), 57–73. doi: 10.1007/s11412-010-9099-z

Peck, D. M. i Jencks, S. M. (1981). Conceptual issues in the teaching and learning of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 339–348. doi: 10.2307/748834

Pennycook, G., Fugelsang, J. A. i Koehler, D. J. (2012). Are we good at detecting conflict during reasoning? *Cognition, 124*, 101–106. doi: 10.1016/j.cognition.2012.04.004

Pennycook, G., Fugelsang, J. A. i Koehler, D. J. (2015). What makes us think? A three-stage dual-process model of analytic engagement. *Cognitive Psychology, 80*, 34–72. doi: 10.1016/j.cogpsych.2015.05.001

Pennycook, G., Ross, R. M., Koehler, D. J. i Fugelsang, J. A. (2017). Dunning-Kruger effects in reasoning: Theoretical implications of the failure to recognize incompetence. *Psychonomic Bulletin & Review, 24*(6), 1774–1784. doi: 10.3758/s13423-017-1242-7

Perry, M. (1991). Learning and transfer: Instructional conditions and conceptual change. *Cognitive Development, 6*, 449–468. doi: 10.1016/0885-2014(91)90049-J

Peterson, R. L., Boada, R., McGrath, L. M., Willcutt, E. G., Olson, R. K. i Pennington, B. F. (2017). Cognitive prediction of reading, math, and attention: Shared and unique influences. *Journal of Learning Disabilities, 50*(4), 408–421. doi: 10.1177/0022219415618500

Piaget, J. (1963). *The Psychology of Intelligence*. New York: Routledge.

Pleskac, T. J. i Busemeyer, J. R. (2010). Two-stage dynamic signal detection: A theory of choice, decision time, and confidence. *Psychological Review, 117*(3), 864–901. doi: 10.1037/a0019737

Prowse Turner, J. A. i Thompson, V. A. (2009). The role of training, alternative models, and logical necessity in determining confidence in syllogistic reasoning. *Thinking & Reasoning, 15*(1), 69–100. doi: 10.1080/13546780802619248

Putarek, V. (2018). Pregled teorijskih okvira i suvremenih pristupa za poticanje konceptualnog i proceduralnog znanja u matematici. *Psihologijske teme, 27*(3), 453–479. doi: 10.31820/pt.27.3.6

Putarek, V. i Vlahović-Štetić, V. (2019). Metacognitive feelings, conflict detection and illusion of linearity. *Psychological Topis, 28*(1), 171–192. doi: 10.31820/pt.28.1.9

Putnick, D. L. i Bornstein, M. H. (2016). Measurement invariance conventions and reporting: The state of the art and future directions for psychological research. *Developmental Review, 41*, 71–90. doi:10.1016/j.dr.2016.06.004

Pylyshyn, Z. W. (1999). Is vision continuous with cognition? The case for cognitive impenetrability of visual perception. *Behavioral and Brain Sciences, 22*(3), 341–423. doi: 10.1017/S0140525X99002022

Reber, R. i Greifeneder, R. (2017). Processing fluency in education: How metacognitive feelings shape learning, belief formation, and affect. *Educational Psychologist, 52*(2), 84–103. doi: 10.1080/00461520.2016.1258173

Reed, S. K., Stebick, S., Comey, B. i Carroll, D. (2012). Finding similarities and differences in the solutions of word problems. *Journal of Educational Psychology, 104*(3), 636–646. doi: 10.1037/a0027181

Resnick, L. B. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. U T. P. Carpenter, J. M. Moser i T. A. Romberg (Ur.), *Addition & Subtraction: A Cognitive Perspective* (str. 136–155). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. B. i Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. U R. Glaser (Ur.), *Advances in Instructional Psychology* (Vol. 3, str. 41–95). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Reyna, V. F. i Brainerd, C. J. (1995). Fuzzy-trace theory: An interim synthesis. *Learning and Individual Differences, 7*(1), 1–75. doi: 10.1016/1041-6080(95)90031-4

Rittle-Johnson, B. i Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91*, 175–189. doi: 10.1037//0022-0663.91.1.175

Rittle-Johnson, B. i Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. U R. C. Kadosh i A. Dowker (Ur.), *Oxford handbook of numerical cognition* (str. 1102–1118). Oxford: Oxford University Press.

Rittle-Johnson, B. i Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: a review. U C. Donlan (Ur.), *The Development of Mathematical Skills* (str. 75–110). London: Psychology Press.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. i Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: an iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*, 346–362. doi: 10.1037//0022–0663.93.2.346

Rittle-Johnson, B., Schneider, M. i Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review, 27*(4), 587–597. doi: 10.1007/s10648-015-9302-x

Rittle-Johnson, B. i Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99*(3), 561–574. doi: 10.1037/0022-0663.99.3.561

Rittle-Johnson, B. i Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology, 101*(3), 529–544. doi: 10.1037/a0014224

Rittle-Johnson, B., Star, J. R. i Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology, 101*, 836–852. doi: 10.1037/a0016026

Roberts, M. J. i Newton, E. J. (2002). Inspection times, the change task, and the rapidresponse selection task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 54*, 1031–1048. doi: 10.1080/713756016

Roelofs, E., Visser, J. i Terwel, J. (2003). Preferences for various learning environments: Teachers' and parents' perceptions. *Learning Environments Research, 6*(1), 77–110. doi: 10.1023/A:1022915910198

Roll, I., Aleven, V. i Koedinger, K. R. (2009). *Helping students know 'further'—increasing the flexibility of students' knowledge using symbolic invention tasks*. U N.A. Taatgen i H. van Rijn (Ur.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Cognitive Science Society* (str. 1169–1174). Austin: Cognitive Science Society.

Roll, I., Aleven, V. i Koedinger, K. R. (2011). *Outcomes and mechanisms of transfer*. U L. Carlson, C. Hoelscher i T. Shipley (Ur.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society* (str. 2824–2829). Austin: Cognitive Science Society.

Roll, I., Holmes, N. G., Day, J. i Bonn, D. (2012). Evaluating metacognitive scaffolding in guided invention activities. *Instructional Science, 40*(4), 691–710. doi:10.1007/s11251-012-9208-7

Rose, H. i Betts, J.R. (2001). *Math matters: The links between high school curriculum, college graduation, and earnings*. San Francisco, CA: Public Policy Institute of California.

Rosenzweig, E. Q. i Wigfield, A. (2016). STEM motivation interventions for adolescents: A promising start, but further to go. *Educational Psychologist, 51*(2), 146–163. doi: 10.1080/00461520.2016.1154792

Sá, W. C., West, R. F. i Stanovich, K. E. (1999). The domain specificity and generality of belief bias: Searching for a generalizable critical thinking skill. *Journal of Educational Psychology, 91*(3), 497-510. doi: 10.1037/0022-0663.91.3.497

Schalk, L., Schumacher, R., Barth, A. i Stern, E. (2017). When problem-solving followed by instruction is superior to the traditional tell-and-practice sequence. *Journal of Educational Psychology, 110*(4), 596–610. doi: 10.1037/edu0000234

Schmidt, R. A. i Bjork, R. A. (1992). New conceptualizations of practice: Common principles in three paradigms suggest new concepts for training. *Psychological Science, 3*, 207–217. doi: 10.1111/j.1467-9280.1992.tb00029.x

Schmidt, H. G., Loyens, S. M. M., Van Gog, T. i Paas, F. (2007). Problem-based learning is compatible with human cognitive architecture: Commentary on Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist, 42*(2), 91–97. doi: 10.1080/00461520701263350

Schneider W. i Artelt C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM, 42*, 149–161. doi: 10.1007/s11858-010-0240-2

Schneider, M., Rittle-Johnson, B. i Star, J. R. (2011). Relations between conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology, 47*(6), 1525–1538. doi:10.1037/a0024997

Schneider, M. i Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: a multimethod approach. *Developmental Psychology, 46*, 178–192. doi: 10.1037/a0016701

Schooler, L. J. i Anderson, J. R. (1990). The disruptive potential of immediate feedback. U M. Piattelli (Ur.), *Proceedings of the 12th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (str. 702–708). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schraw, G. (2009). A conceptual analysis of five measures of metacognitive monitoring. *Metacognition and Learning, 4*(1), 33–45. doi: 10.1007/s11409-008-9031-3

Schwartz, D. L. i Bransford, J. D. (1998). A time for telling. *Cognition and Instruction, 16*, 475–522. doi: 10.1207/s1532690xci1604_4

Schwartz, D. L., Chase, C. C., Oppezzo, M. A. i Chin, D. B. (2011). Practicing versus inventing with contrasting cases: the effects of telling first on learning and transfer. *Journal of Educational Psychology, 103*(4), 759–775. doi: 10.1037/a0025140

Schwartz, D. L. i Martin, T. (2004). Inventing to prepare for future learning: The hidden efficiency of encouraging original student production in statistics instruction. *Cognition and Instruction, 22*(2), 129–184. doi: 10.1207/s1532690xci2202_1

Schwarz, N. (2004). Metacognitive experiences in consumer judgment and decision making. *Journal of Consumer Psychology, 14*, 332–348. doi: 10.1207/s15327663jcp1404_2

Schwarz, N. (2010). Meaning in context: Metacognitive experiences. U B. Mesquita, L. F. Barrett i E. R. Smith (Ur.), *The mind in context* (str. 105–125). New York: Guilford.

Şendağ, S. i Odabaşı, H. F. (2009). Effects of an online problem based learning course on content knowledge acquisition and critical thinking skills. *Computers & Education, 53*(1), 132–141. doi: 10.1016/j.compedu.2009.01.008

Sepeng, P. i Madzorera, A. (2014). Sources of difficulty in comprehending and solving mathematical word problems. *International Journal of Educational Sciences, 6*(2), 217–225. doi: 10.1080/09751122.2014.11890134

Sherman, J. W., Gawronski, B. i Trope, Y. (2014). Preface. U B. Gawronski, J. W. Sherman i Y. Trope (Ur.), *Dual-process theories of the social mind* (str. xi–xii). New York: The Guilford Press.

Shiloh, S., Salton, E. i Sharabi, D. (2002). Individual differences in rational and intuitive thinking styles as predictors of heuristic responses and framing effects. *Personality and Individual Differences, 32*(3), 415–429. doi: 10.1016/S0191-8869(01)00034-4

Shynkaruk, J. M. i Thompson, V. A. (2006). Confidence and accuracy in deductive reasoning. *Memory & Cognition, 34*(3), 619–632. doi: 10.3758/BF03193584

Siegler. R. S. i Crowley, K. (1994). Constraints on learning in nonprivileged domains. *Cognitive Psychology, 27*, 194–226. doi: 10.1006/cogp.1994.1016

Siegler, R. S. i Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General, 127*, 377–397. doi: 10.1037/0096-3445.127.4.377

Siegler, R. S., Thompson, C. A. i Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*, 273–296. doi: 10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Silver, E. A. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. U J. Hiebert (Ur.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (str. 181–198). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28.

Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C. i Strawhun, B. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 287–301. doi: 10.1016/j.jmathb.2005.09.009

Simmons, J. P. i Nelson, L. D. (2006). Intuitive confidence: Choosing between intuitive and nonintuitive alternatives. *Journal of Experimental Psychology: General, 135*, 409–428. doi: 10.1037/0096-3445.135.3.409

Sinha, T. i Kapur, M. (2019). When Productive Failure Fails. U A. K. Goel, C. M. Seifert, i C. Freksa (Ur.), *Proceedings of the 41st Annual Conference of the Cognitive Science Society* (str. 2811–2817). Montreal, QB: Cognitive Science Society.

Song, Y. i Kapur, M. (2017). How to flip the classroom – "productive failure or traditional flipped classroom". Pedagogical design? *Educational Technology & Society, 20*(1), 292–305.

Stanovich, K. E. (1999). *Who is rational? Studies of individual differences in reasoning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Stanovich, K. E. (2004). *The robot's rebellion: Finding meaning the age of Darwin*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Stanovich, K. E. (2009). Distinguishing the reflective, algorithmic, and autonomous minds: Is it time for a tri-process theory? U J. St. B. T. Evans i K. Frankish (Ur.), *In two minds: Dual processes and beyond* (str. 55–88). Oxford: Oxford University Press.

Stanovich, K. E. (2011). *Rationality and the reflective mind*. New York: Oxford University Press.

Stanovich, K. E. (2018). Miserliness in human cognition: the interaction of detection, override and mindware. *Thinking & Reasoning, 24*(4), 423–444. doi: 10.1080/13546783.2018.1459314

Stanovich, K. E. i Toplak, M. E. (2012). Defining features versus incidental correlates of Type 1 and Type 2 processing. *Mind & Society, 11*(1), 3–13. doi: 10.1007/s11299-011-0093-6

Stanovich, K. E. i West, R. F. (1998a). Cognitive ability and variation in selection task performance. *Thinking and Reasoning, 4*, 193–230. doi: 10.1080/135467898394139

Stanovich, K. E. i West, R. F. (1998b). Individual differences in framing and conjunction effects. *Thinking and Reasoning, 4*, 289–317. doi: 10.1080/135467898394094

Stanovich, K. E. i West, R. F. (1998c). Individual differences in rational thought. *Journal of Experimental Psychology: General, 127*, 161–188. doi: 10.1037/0096-3445.127.2.161

Stanovich, K. E. i West, R. F. (2008). On the relative independence of thinking biases and cognitive ability. *Journal of Personality and Social Psychology, 94*, 672–695. doi: 10.1037/0022-3514.94.4.672

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*, 404–411. doi: 10.2307/30034943

Star, J. R. i Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology, 102*(4), 408–426. doi: 10.1016/j.jecp.2008.11.004

Star, J. R. i Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education 13*(2), 169-181. doi: 10.1080/14926156.2013.784828

Stigler, J. W. i Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York, NY: The Free Press.

Sweller, J., Kirschner, P. A. i Clark, R. (2007). Why minimally guided teaching techniques do not work: A reply to commentaries. *Educational Psychologist, 42*(2), 115–121. doi: 10.1080/00461520701263426

The Council of the European Union (2018). *Council recommendation of 22 May 2018on key competences for lifelong learning*. Preuzeto s: https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=EN

Thompson, V. A. (2009). Dual process theories: A metacognitive perspective. U J. St. B. T. Evans i K. Frankish (Ur.), *In two minds: Dual processes and beyond* (str. 171–196). Oxford: Oxford University Press.

Thompson, V. A., Evans, J. St. B. T. i Campbell, J. I. D. (2013). Matching bias on the selection task: It's fast and feels good. *Thinking & Reasoning, 19*(3/4), 431–452. doi: 10.1080/13546783.2013.820220

Thompson, V. A. i Johnson, S. C. (2014). Conflict, metacognition, and analytic thinking. *Thinking & Reasoning, 20*(2), 215–244. doi: 10.1080/13546783.2013.869763

Thompson, V. A. i Morsanyi, K. (2012). Analytic thinking: Do you feel like it? *Mind & Society, 11*(1), 93–105. doi: 10.1007/s11299-012-0100-6

Thompson, V. A., Pennycook, G., Trippas, D. i Evans, J. S. B. T. (2018). Do smart people have better intuitions? *Journal of Experimental Psychology: General, 147*(7), 945–961. doi: 10.1037/xge0000457

Thompson, V. A., Prowse Turner, J. i Pennycook, G. (2011). Intuition, reason and metacognition. *Cognitive Psychology, 63*, 107–140. doi:10.1016/j.cogpsych.2011.06.001

Thompson, V. A., Prowse Turner J. A., Pennycook, G., Ball, L. J., Brack, H., Ophir, Y. i Ackerman, R. (2013). The role of answer fluency and perceptual fluency as metacognitive cues for initiating analytic thinking. *Cognition, 128*(2), 237–251. doi: 10.1016/j.cognition.2012.09.012

Thompson, V. A., Striemer, C. L., Reikoff, R., Gunter, R. W. i Campbell, J. I. D. (2003). Syllogistic reasoning time: Disconfirmation disconfirmed. *Psychonomic Bulletin and Review, 10*, 184–189. doi: 10.3758/BF03196483

Torbeyns, J., Verschaffel, L. i Ghesquière, P. (2004). Strategy development in children with mathematical disabilities: Insights from the Choice/No-Choice Method and the Chronological-Age/ Ability-Level–Match design. *Journal of Learning Disabilities, 37*(2), 119–131. doi: 10.1177/00222194040370020301

Travers, E., Rolison, J. J. i Feeney, A. (2016). The time course of conflict on the cognitive reflection test. *Cognition, 150*, 109–118. doi: 10.1016/j.cognition.2016.01.015

Trninic, D., Wagner, R. i Kapur, M. (2018). Rethinking failure in mathematics education: A historical appeal. *Thinking Skills and Creativity, 30*, 76–89. doi: 0.1016/j.tsc.2018.03.008

Tulis, M. i Ainley, M. (2011). Interest, enjoyment and pride after failure experiences? Predictors of students' state-emotions after success and failure during learning in mathematics. *Educational Psychology, 31*(7), 1–29. doi: 10.1080/01443410.2011.608524

Tuovinen, J. E. i Sweller, J. (1999). A comparison of cognitive load associated with discovery learning and worked examples. *Journal of Educational Psychology, 91*(2), 334–341. doi: 10.1037/0022-0663.91.2.334

Tversky, A. i Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science, 185*, 1124–1131. doi: 10.1126/science.185.4157.1124

Tversky, A. i Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review, 90*(4), 293–315. doi. 10.1037/0033-295X.90.4.293

U.S. Department of Education (2016). *National education technology plan*. Preuzeto s: https://www.ed.gov/news/press-releases/us-department-education-releases-2016-national-education-technology-plan

Vamvakoussi, X. i Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*, 453–467. doi: 10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vandenberg, R. J. i Lance, C. E. (2000). A review and synthesis of the measurement invariance literature: suggestions, practices, and recommendations for organizational research. *Organizational Research Methods, 3*, 4–70. doi:10.1177/109442810031002

Van Dooren, W., De Bock, D., De Bolle, E., Janssens, D. i Verschaffel, L. (2003). Secondary school students' illusion of linearity: The role of direct versus indirect perimeter and area measures. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2*, 1–18.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. i Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53*(2), 113–138. doi: 10.1023/A:1025516816886

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. i Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction, 14*, 485–501. doi: 10.1016/j.learninstruc.2004.06.019

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. i Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57–86. doi: 10.1207/s1532690xci2301_3

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. i Verschaffel, L. (2005). Students' overreliance on linearity: An effect of school-like word problems? U H. L. Chick i J. L. Vincent (Ur.), *Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (str. 265–272). Melbourne: PME.

VanLehn, K. (1999). Rule learning events in the acquisition of a complex skill: An evaluation of cascade. *The Journal of the Learning Sciences, 8*(1), 71–125. doi: 10.1207/s15327809jls0801_3

VanLehn, K., Siler, S., Murray, C., Yamauchi, T. i Baggett, W. B. (2003). Why do only some events cause learning during human tutoring? *Cognition and Instruction, 21*(3), 209–249. doi: 10.1207/S1532690XCI2103_01

Verschueren, N., Schaeken, W. i D'Ydewalle, G. (2005). Everyday conditional reasoning: A working memory–dependent tradeoff between counterexample and likelihood use. *Memory & Cognition, 33*(1), 107–119. doi: 10.3758/BF03195301

Vizek Vidović, V. (Ur.) (2005). *Cjeloživotno obrazovanje učitelja i nastavnika: Višestruke perspektive*. Zagreb: Institut za društvena istraživanja u Zagrebu.

Vlahović-Štetić, V. (1996). *Problemski matematički zadaci i uspješnost njihova rješavanja u početku školovanja*. Neobjavljeni doktorski rad. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu.

Vlahović-Štetić, V., Pavlin-Bernardić, N. i Rajter, M. (2010). Illusion of linearity in geometry: Effect in multiple-choice problems mathematical thinking and learning. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 54–67. doi: 10.1080/10986060903465871

Vosniadou, S. (2007). Conceptual change and education. *Human Development, 50*(1), 47–54. doi: 10.1159/000097684

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X. i Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to the problem of conceptual change. U S. Vosniadou (Ur.), *International handbook of research on conceptual change* (str. 3–34). New York: Routledge.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Havard University Press.

Wadsworth, B. J. (1996). *Piaget's theory of cognitive and affective development*. White Plains, NY: Longman.

Walker, A. i Leary, H. (2009). A Problem Based Learning Meta Analysis: Differences Across Problem Types, Implementation Types, Disciplines, and Assessment Levels. Interdisciplinary *Journal of Problem-Based Learning, 3*(1). 533–568. doi: 10.7771/1541-5015.1061

Wang, X. (2013). Why students choose STEM majors: Motivation, high school learning, and postsecondary context of support. *American Educational Research Journal, 50*(5), 1081–1121. doi: 10.3102/0002831213488622

Wang, M-T. i Degol, J. (2013). Motivational pathways to STEM career choices: Using expectancy-value perspective to understand individual and gender differences in STEM fields. *Developmental Review, 33*(4), 304–340. 10.1016/j.dr.2013.08.001

Wang, S. i Thompson, V. (2019). Fluency and Feeling of rightness: The effect of anchoring and models. *Psychological Topics, 28*(1), 37–72. doi: 10.31820/pt.28.1.3

West, S. G., Taylor, A. B. i Wu, W. (2012). Model fit and model selection in structural equation modeling. U R. H. Hoyle (Ur.), *Handbook of structural equation modeling* (str. 209–231). New York: The Guilford Press.

West, R. F., Toplak, M. E. i Stanovich, K. E. (2008). Heuristics and biases as measures of critical thinking: Associations with cognitive ability and thinking dispositions. *Journal of Educational Psychology, 100*(4), 930–941. doi: 10.1037/a0012842

Wigfield, A., Tonks, S. i Klauda, S. L. (2009). Expectancy-value theory. U K. R. Wenzel i A. Wigfield (Ur.), *Educational psychology handbook series. Handbook of motivation at school* (str. 55–75). New York, NY, US: Routledge/Taylor & Francis Group.

Wineburg, S. (1998). Reading Abraham Lincoln: An expert/expert study in the interpretation of historical texts. *Cognitive Science, 22*(3), 319–346. doi: 10.1207/s15516709cog2203_3

Wise, A. F. i O'Neill, K. (2009). Beyond more versus less: A reframing of the debate on instructional guidance. U S. Tobias i T. M. Duffy (Ur.), *Constructivist instruction: Success or failure* (str. 82–105). New York: Routledge.

Witteman, C., van den Bercken, J., Claes, L. i Godoy, A. (2009). Assessing rational and intuitive thinking styles. *European Journal of Psychological Assessment, 25*(1), 39–47. doi: 10.1027/1015-5759.25.1.39

Wolf, E. J., Harrington, K. M., Clark, S. L. i Miller, M. W. (2013). Sample size requirements for structural equation models: An evaluation of power, bias, and solution propriety. *Educational and Psychological Measurement, 76*(6), 913–934. doi: 10.1177/0013164413495237

Wu, H. i Estabrook, R. (2016). Identification of confirmatory factor analysis models of different levels of invariance for ordered categorical outcomes. *Psychometrika, 81*(4), 1014–1045. doi: 10.1007/s11336-016-9506-0

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition, 36*(2), 155–193. doi: 10.1016/0010-0277(90)90003-3

Young, A. M., Wendel, P. J., Esson, J. M. i Plank, K. M. (2018). Motivational decline and recovery in higher education STEM courses. *International Journal of Science Education, 40*(9), 1016–1033, doi: 10.1080/09500693.2018.1460773

Ziegler, E. i Stern, E. (2016). Consistent advantages of contrasted comparisons: Algebra learning under direct instruction. *Learning and Instruction, 41*, 41–51. doi: 10.1016/j.learninstruc.2015.09.006

Županović, V. i Šorić, K. (2016). *Primijenjena matematika podržana računalom*. Slavonski Brod: Gimnazija Matija Mesić.

8. PRILOZI

Prilog 1

Zadaci korišteni u ispitivanju na računalima (podebljani su točni odgovori; zadaci od prvog do petog su zadaci o proporcionalnom odnosu, a zadaci od šestog do desetog su zadaci o neproporcionalnom odnosu):

1. Da bi se postavila ograda oko igrališta oblika kvadrata kojemu je stranica dugačka 60 m potrebna su 3 dana. Koliko je dana potrebno za postavljanje ograde oko igrališta oblika kvadrata kojemu je stranica dugačka 120 m? Brzina kojom rade radnici jednaka je u oba slučaja.
   1) 9 dana
   2) 6 dana
   3) nijedno od ponuđenog

2. U sportsko-rekreativnom centru nalaze se dva igrališta oblika kvadrata. Za povlačenje crte oko ruba većeg igrališta stranice duljine 80 metara potrebno je 18 kantica boje. Koliko kantica iste boje je potrebno da se oboji crta oko ruba manjeg dječjeg igrališta duljine stranice 40 metara? Crta oko ruba je jednake širine kod oba igrališta.
   1) 12 kantica
   2) 9 kantica
   3) nijedno od ponuđenog

3. Sara za zagrijavanje na treningu trči po stazi kružnog oblika. Za stazu duljine 400 metara potrebno je 70 sekundi da je pretrči. Koliko je vremena potrebno da pretrči stazu istog oblika, ali duljine 200 metara, ako trči jednako brzo kao i na prvoj stazi?
   1) 35 sekundi
   2) 15 sekundi
   3) nijedno od ponuđenog

4. Za ukrašavanje ruba prozora oblika kvadrata Lea je kupila žaruljice. Za prozor čije su stranice duljine 40 cm treba joj 60 žaruljica. Koliko isto takvih žaruljica treba Lei za ukrašavanje ruba prozora oblika kvadrata čije su stranice duljine 80 cm?
   1) 100 žaruljica
   2) 120 žaruljica
   3) nijedno od ponuđenog

5. Vlaku treba 30 minuta da prijeđe u jednom smjeru relaciju duljine 40 km. Koliko bi vlaku trebalo minuta da prijeđe u jednom smjeru drugu relaciju duljine 20 km, ako bi vozio jednakom brzinom kao i za prvu relaciju?
   1) 15 minuta
   2) 10 minuta
   3) nijedno od ponuđenog

6. U voćnjaku koji je oblika kvadrata, sa stranicama duljine 5 metara, može rasti 9 stabala jabuke. Koliko stabala jabuke može rasti u voćnjaku oblika kvadrata kojemu su stranice dugačke 10 metara? Razmak između stabala jabuke je jednak u oba voćnjaka.
   1) 36 stabala jabuke
   2) 18 stabala jabuke
   3) nijedno od ponuđenog

7. Josipovi roditelji su u dvorište postavili okrugli trampolin promjera 3 m za svog sina i njegove prijatelje. Ako se po cijelom trampolinu može smjestiti ukupno 10 djece, koliko bi se djece moglo smjestiti po cijelom trampolinu istog oblika kojemu je promjer 12 m?
   1) 40 djece
   2) 160 djece
   3) nijedno od ponuđenog

8. Luka je odlučio prebojiti dva stolića u svojoj kući. Za cijeli gornji dio stolića oblika kruga i promjera 30 cm treba mu 1 litra boje. Koliko mu iste boje treba da oboji cijeli gornji dio drugog stolića oblika kruga i promjera 90 cm?
   1) 3 litre
   2) 9 litara
   3) nijedno od ponuđenog

9. Matej želi obojiti zidove drvene kućice. Za jedan cijeli zid koji ima oblik kvadrata sa stranicom duljine 6 metara trebaju mu 2 kantice boje. Koliko bi mu kantica boje trebalo da oboji jedan cijeli zid kućice oblika kvadrata sa stranicom duljine 12 metra?
   1) 8 kantica
   2) 4 kantice
   3) nijedno od ponuđenog

10. Krov garaže oblika kvadrata i duljine stranice 6 metara prekriva 100 crijepova. Koliko crijepova iste veličine kao za prvi krov prekiva susjedni krov koji, također, ima oblik kvadrata, ali stranicu duljine 3 metra?
   1) 50 crijepova
   2) 25 crijepova
   3) nijedno od ponuđenog

Prilog 2

Školski uspjeh i učenje matematike

Prosječan školski uspjeh svih učenika na kraju prethodne školske godine bio je 4.14 (*SD* = 0.49, raspon 1.80-5.00). Učenici su na kraju prethodne školske godine imali prosječnu ocjenu iz matematike 3.31 (*SD* = 1.00, raspon 1-5), odnosno 24.9% učenika imalo je ocjenu dovoljan, 33.2% ocjenu dobar, 27.8% vrlo dobar i 14% odličan. Za kraj tekuće školske godine učenici su predvidjeli prosječnu ocjenu 3.53 (*SD* = 1.00, raspon 1-5). Korelacija između ostvarene i predviđene ocjene iz matematike bila je visoka i statistički značajna ($r(896) = .73$, $p < .001$), kao i korelacija između školskog uspjeha i ostvarene ocjene iz matematike ($r(895) = .70$, $p < .001$) te previđene ocjene iz matematike ($r(895) = .57$, $p < .001$).

Polovica učenika (50.3%) navodi da uče matematiku manje od jednog sata tjedno. Njih 28.6% uči 1-2 sata, 14.3% 2-3 sata, 4.6% 3-4 sata, a 2.2% više od 4 sata. Svojom ocjenom iz matematike u potpunosti je nezadovoljno 17.9% učenika, djelomično nezadovoljno 21% učenika, niti zadovoljno niti nezadovoljno 21.9% učenika, djelomično zadovoljno 24.5% i u potpunosti zadovoljno 14.6%.

Na pitanje kada bi mogli sami odabrati školske predmete koje će učiti, bi li među njima bila matematika, 19% učenika odgovorilo je da sigurno ne bi, 19.2% da vjerojatno ne bi, 9.6% svejedno mi je, 27.7% vjerojatno bi bila i 24.5% sigurno bi bila. Dakle, nešto više od 50% učenika odabralo bi matematiku za učenje kad bi mogli birati predmete koje će učiti.

Prilog 3

Tablica 14

Prosječne vrijednosti na česticama koje mjere motivaciju i emocije vezane uz rješavanje zadataka za cijeli uzorak (N = 898) i za pojedine skupine, te rezultati jednosmjerne analize varijance za testiranje razlika u prosječnim vrijednostima između tih skupina.

	1	2	3	4	5	6	ukupno	ANOVA
	M (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	*M* (*SD*)	F^b
Bio/bila sam motiviran/a sudjelovati u ovom istraživanju čim sam čuo/la za njega.	2.89 (1.26)	2.94 (1.19)	2.86 (1.21)	2.96 (1.23)	3.07 (1.22)	2.82 (1.25)	2.92 (1.23)	0.76
Nakon što sam pročitao/la upute i primjere sa zadacima, ovo istraživanje činilo mi se zanimljivim.[a]	3.08 (1.26)	2.93 (1.20)	2.94 (1.29)	3.11 (1.22)	3.04 (1.28)	2.94 (1.23)	3.01 (1.25)	0.64
Bilo mi je dosadno rješavati zadatke.	2.82 (1.20)	3.04 (1.28)	3.01 (1.28)	2.81 (1.35)	2.94 (1.27)	3.00 (1.32)	2.93 (1.28)	0.92
Sveukupno, sudjelovanje u ovom istraživanju bilo mi je naporno.	2.40 (1.21)	2.65 (1.27)	2.68 (1.29)	2.31 (1.31)	2.53 (1.34)	2.58 (1.31)	2.52 (1.29)	1.90
Istraživanje mi je bilo zanimljivo.	3.33 (1.15)	3.09 (1.15)	3.22 (1.19)	3.28 (1.32)	3.32 (1.22)	3.29 (1.23)	3.26 (1.21)	0.82
Osjećao/la sam pritisak da zadatke riješim što točnije.	3.16 (1.46)	2.86 (1.47)	3.25 (1.45)	2.84 (1.50)	3.08 (1.46)	3.02 (1.46)	3.03 (1.47)	1.78
Osjećao/la sam se tjeskobno za vrijeme rješavanja zadataka.	2.39 (1.37)	2.43 (1.51)	2.68 (1.43)	2.21 (1.40)	2.54 (1.41)	2.44 (1.39)	2.45 (1.42)	1.83

Napomena: 1 = Kontrolna skupina – dvostruko odgovaranje (*N* = 153); 2 = Proceduralna uputa – dvostruko odgovaranje (*N* = 147); 3 = Konceptualna uputa – dvostruko odgovaranje (*N* = 146); 4 = Kontrolna skupina – samo jedno odgovaranje (*N* = 151); 5 = Proceduralna uputa – samo jedno odgovaranje (*N* = 150); 6 = Konceptualna uputa – samo jedno odgovaranje (*N* = 151)

a za poduzorke bez dodatne upute čestica je glasila: „Nakon što sam pročitao/la upute, ovo istraživanje činilo mi se zanimljivim.“

b *df* = 5/886

Prilog 4

Prikaz primijenjene produktivne pogreške.

a) Proceduralna uputa

Prije nego se započneš s rješavanjem 10 zadataka, prikazan je zadatak koji se može riješiti na više načina. Molimo te da u prostor ispod zadatka upišeš što više postupaka kojima bi se on mogao riješiti. Nakon što napišeš postupke i opredijeliš se za konačno rješenje, molimo te da to rješenje upišeš u prostor pored riječi „Rješenje“. Nakon toga ćeš dobiti povratnu informaciju je li tvoje rješenje točno ili netočno. Važno je da promisliš o zadatku kako bi kasnije što uspješnije rješavao/la zadatke.

U jednom kupalištu nalaze se dva bazena koji imaju dno oblika kvadrata. Dno jednog bazena ima stranice duljine 4 metara, a za prekrivanje tog dna utrošeno je 250 pločica. Koliko je pločica, istih dimenzija kao za prvi bazen, potrebno da se prekrije dno drugog bazena koje ima stranice duljine 8 metara?

Što misliš zašto je tvoj odgovor bio netočan[8]? Molimo te DOBRO RAZMISLIŠ o svojem odgovoru i navedeš razloge koji se prvenstveno odnose na to kako si shvatio/la i postavio/la zadatak.

ĆEŠ RJEŠAVATI TE VELIK BROJ UČENIKA GRIJEŠI U NJIHOVOM RAZLIKOVANJU, a time i u rješavanju, pa te molimo da pažljivo promotriš način njihovog

[8] Učenicima koji su točno riješili zadatak pisalo je „Što misliš zašto je tvoj odgovor bio točan?“.

rješavanja kako bi kasnije uspješnije riješio/la zadatke. Nakon toga ćeš rješavati 10 zadataka i **na kraju ćeš dobiti obavijest koliko si ih točno riješio/la**.

PRIMJERI ZADATAKA:

1. zadatak:

U jednom kupalištu nalaze se dva bazena koji imaju oblik kvadrata. Jedan bazen ima stranice duljine 4 metara, a za prekrivanje ruba tog bazena utrošeno je 250 pločica. Koliko je pločica, istih dimenzija kao za prvi bazen, potrebno da se prekrije rub drugog bazena koje ima stranice duljine 8 metara?

$a_1 = 4$ m

$n_1 = 250$ pločica

$a_2 = 8$ m

$n_2 = ?$

$k = a_2/a_1 = 8/4 = 2$

$n_2 = n_1*k = 250*2$

$n_2 = 500$ pločica

2. zadatak:

U jednom kupalištu nalaze se dva bazena koji imaju dno oblik kvadrata. Dno jednog bazena ima stranice duljine 4 metara, a za prekrivanje tog dna utrošeno je 250 pločica. Koliko je pločica, istih dimenzija kao za prvi bazen, potrebno da se prekrije dno drugog bazena koje ima stranice duljine 8 metara?

$a_1 = 4$ m

$n_1 = 250$ pločica

$a_2 = 8$ m

$n_2 = ?$

$k = a_2/a_1 = 8/4 = 2$

$n_2 = n_1*k^2 = 250*4$

$n_2 = 1000$ pločica

Jesi li zadatak na početku rješavao/la jednako kao što je prikazano u primjeru 1 ili kao što je prikazano u primjeru 2? Što misliš **sada** zašto je tvoj odgovor bio netočan[9]?

b) Konceptualna uputa

Prije nego se započneš s rješavanjem 10 zadataka, prikazan je zadatak koji se može riješiti na više načina. Molimo te da u prostor ispod zadatka upišeš što više postupaka kojima bi se on mogao riješiti. Nakon što napišeš postupke i opredijeliš se za konačno rješenje, molimo te da to rješenje upišeš u prostor pored riječi „Rješenje“. Nakon toga ćeš dobiti povratnu informaciju je li tvoje rješenje točno ili netočno. Važno je da promisliš o zadatku kako bi kasnije što uspješnije rješavao/la zadatke.

U jednom kupalištu nalaze se dva bazena koji imaju dno oblika kvadrata. Dno jednog bazena ima stranice duljine 4 metara, a za prekrivanje tog dna utrošeno je 250 pločica. Koliko je pločica, istih dimenzija kao za prvi bazen, potrebno da se prekrije dno drugog bazena koje ima stranice duljine 8 metara?

[9] Učenicima koji su točno riješili zadatak pisalo je „Što misliš **sada** zašto je tvoj odgovor bio točan?“.

Što misliš zašto je tvoj odgovor bio netočan[10]? Molimo te DOBRO RAZMISLIŠ o svojem odgovoru i navedeš razloge koji se prvenstveno odnose na tvoj način razmišljanja o zadatku.

Kako bi što bolje razumio/la zadatak koji je bio prikazan, kao i zadatke koji tek slijede, pred tobom se nalaze dva zadatka i prikazani su mogući načini njihova rješavanja. Ova dva zadatka slična su onima koje ćeš kasnije rješavati. **POSTOJE DVIJE VRSTE ZADATAKA KOJE ĆEŠ RJEŠAVATI TE VELIK BROJ UČENIKA GRIJEŠI U NJIHOVOM RAZLIKOVANJU**, a time i u rješavanju, pa te molimo da pažljivo promotriš način njihovog rješavanja kako bi kasnije uspješnije riješio/la zadatke. Nakon toga ćeš rješavati 10 zadataka i **na kraju rada dobit ćeš obavijest koliko si ih točno riješio/la**.

[10] Učenicima koji su točno riješili zadatak pisalo je „Što misliš zašto je tvoj odgovor bio točan?“.

PRIMJERI ZADATAKA:

1. zadatak:

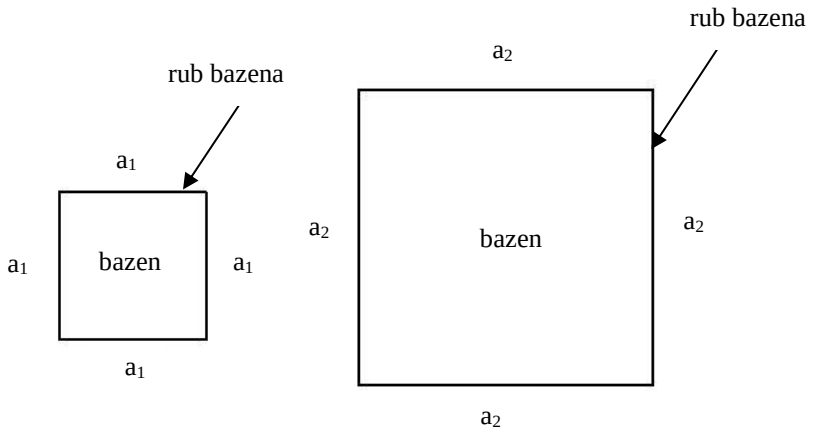
U jednom kupalištu nalaze se dva bazena koji imaju oblika kvadrata. Jedan bazen ima stranice duljine 4 metara, a za prekrivanje ruba tog bazena utrošeno je 250 pločica. Koliko je pločica, istih dimenzija kao za prvi bazen, potrebno da se prekrije rub drugog bazena koje ima stranice duljine 8 metara?

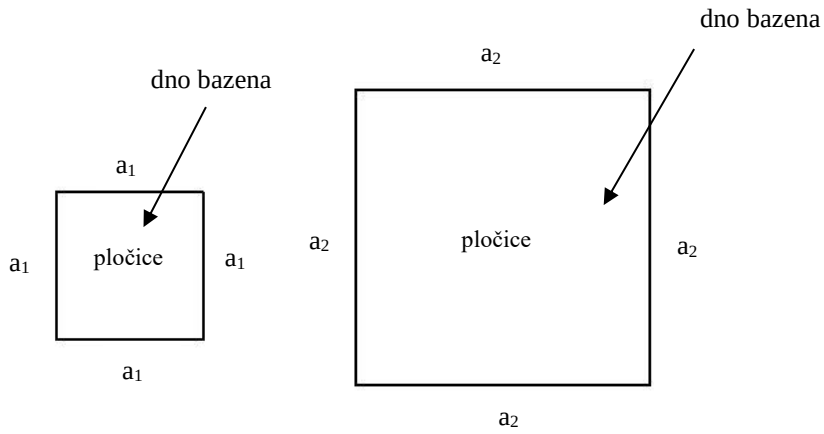
Nastavnik je objasnio učenicima da je rub bazena, zapravo, opseg kvadrata. Kako bi im dodatno pojasnio zadatak, nacrtao je na ploči sljedeće skice:

2. zadatak:

U jednom kupalištu nalaze se dva bazena koji imaju dno oblika kvadrata. Dno jednog bazena ima stranice duljine 4 metara, a za prekrivanje tog dna utrošeno je 250 pločica. Koliko je pločica, istih dimenzija kao za prvi bazen, potrebno da se prekrije dno drugog bazena koje ima stranice duljine 8 metara?

Nastavnik je objasnio učenicima da dno bazena prekriveno pločicama predstavlja površinu kvadrata, za razliku od prvog zadatka u kojem živica predstavlja opseg kvadrata. Kako bi im dodatno pojasnio zadatak, nacrtao je na ploči sljedeće skice:





Nastavnik je dalje rekao učenicima da, kao što se vidi i na slici, drugi kvadrat ima dva puta dulju stranicu od prvoga, pa je i ukupna duljina ruba bazena oko drugog, većeg vrta, dva puta veća. Drugim riječima, ukupna duljina ruba drugog bazena se povećala onoliko puta koliko se povećala stranica. Stoga za prekrivanje ruba bazena dva puta većeg opsega treba i dva puta više pločica.

Nastavnik je dalje rekao učenicima da, kao što se vidi i na slici, drugi kvadrat (tj. dno bazena) ima dva puta dulju stranicu od prvoga. Drugi bazen koji ima dvostruko dulju stranicu mogao bi sadržavati četiri manja bazena. Dakle, povećanjem stranice kvadrata dva puta povećava se i površina kvadrata, ali ne dvostruko, kako je slučaj kod prvog zadatka u kojem se radi samo o opsegu, već se iznos za koji je stranica povećana kvadrira kako bi se dobio traženi iznos. Stoga za prekrivanje dna bazena koji ima dvostruko dulju stranicu treba četiri puta više pločica.

Jesi li zadatak na početku rješavao/la jednako kao što je prikazano u primjeru 1 ili kao što je prikazano u primjeru 2? Što misliš **sada** zašto je tvoj odgovor bio netočan[11]?

[11] Učenicima koji su točno riješili zadatak pisalo je „Što misliš zašto je tvoj odgovor bio točan?“.

Prilog 5

Tablica 15

Tetrahorički koeficijenti korelacija za odgovaranje s vremenskim pritiskom (N = 450-452) i bez vremenskog pritiska (N = 905-908).

	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10
Z1	--	.37	.39	.40	.14	-.31	-.04	.01	-.32	-.24
Z2	.25	--	.31	.36	.30	-.19	-.05	-.12	-.18	-.11
Z3	44	.23	--	.33	.55	-.10	-.06	-.14	-.03	-.10
Z4	.30	.41	.27	--	.37	-.16	.07	-.05	-.07	-.14
Z5	.26	.13	.34	.12	--	.13	.07	.06	.06	.07
Z6	-22	-.19	.13	-.16	.00	--	.49	.49	.68	.71
Z7	-.02	-.14	-.17	.06	.01	.30	--	.60	.59	.54
Z8	.01	-.21	-.23	-.14	-.11	.16	.32	--	.56	.53
Z9	-.2	-.10	-.09	-.27	.14	.53	.48	.33	--	.65
Z10	-.07	-.08	-.24	-.28	-.03	.53	.46	.36	.56	--

Napomena: ispod dijagonale su tetrahorički koeficijenti za odgovaranje s vremenskim pritiskom, a iznad dijagonale za odgovaranje bez vremenskog pritiska [izračunato preko algoritama u funkciji hetcor iz polycor paketa u računalnom programu R].

Z1-Z10: zadaci od 1 do 10 (Z1-Z5: zadaci o proporcionalnom odnosu; Z6-Z10: zadaci o neproporcionalnom odnosu).

Prilog 6

Tablica 16

Pokazatelji slaganja dvofaktorskog i jednofaktorskog rješenja kod odgovaranja bez vremenskog pritiska, kao i testiranje razlika između ova dva modela.

	Dva faktora						Jedan faktor							
	χ^2	χ^2/df	CFI	TLI	RMSEA (90% CI)	SRMR	χ^2	χ^2/df	CFI	TLI	RMSEA (90% CI)	SRMR	$\Delta\chi^2$	Δdf
1	44.32	1.30	.92	.90	.05 (.00, . 08)	.14	Model nije konvergirao							
2	38.64	1.14	.95	.94	.03 (.00, .07)	.11	59.74**	1.71	.74	.67	.07 (.04, .10)	.14	10.24**	1
3	61.03**	1.80	.86	.81	.07 (.04, .10)	.16	79.97***	2.28	.76	.69	.09 (.07, .12)	.17	14.63***	1

1 = Kontrolna skupina (*N* = 153; *df* za dva faktora = 34); 2 = Skupina s proceduralnom uputom (*N* = 148; *df* za dva faktora = 34; *df* za jedan faktor = 35); 3 = Skupina s konceptualnom uputom (*N* = 150; *df* za dva faktora = 34; *df* za jedan faktor = 35).

Tablica 17

Pokazatelji slaganja dvofaktorskog i jednofaktorskog rješenja kod odgovaranja bez vremenskog pritiska, kao i testiranje razlika između ova dva modela.

	Dva faktora						Jedan faktor							
	χ^2	χ^2/df	CFI	TLI	RMSEA (90% CI)	SRMR	χ^2	χ^2/df	CFI	TLI	RMSEA (90% CI)	SRMR	$\Delta\chi^2$	Δdf
1	63.11**	1.86	.92	.90	.08 (.05, .10)	.17	95.05***	2.72	.84	.80	.11 (.08, .13)	.19	20.87***	
2	50.93*	1.50	.94	.91	.06 (.02, .09)	.13	Model nije konvergirao.							
3	57.41**	1.69	.91	.88	.07 (.04, .10)	.14	75.57***	2.16	.80	.79	.09 (.06, .12)	.16	14.54***	1
4	39.20	1.15	.99	.99	.03 (.00, .07)	.13	72.03***	2.06	.93	.91	.08 (.06, .11)	.18	22.07***	1
5	72.74***	2.14	.85	.80	.09 (.06, .12)	.16	80.45***	2.30	.82	.77	.09 (.07, .12)	.18	7.68**	1
6	40.96	1.20	.98	.97	.04 (.00, .07)	.12	104.92***	3.00	.77	.70	.12 (.09, .14)	.20	39.77***	1

1 = Kontrolna skupina – dvostruko odgovaranje (*N* = 153; *df* za dva faktora = 34, *df* za jedan faktor = 35); 2 = Skupina s proceduralnom uputom – dvostruko odgovaranje (*N* = 148; *df* za dva faktora = 34; *df* za jedan faktor = 35); 3 = Skupina s konceptualnom uputom – dvostruko odgovaranje (*N* = 149; *df* za dva faktora = 34; *df* za jedan faktor = 35); 4 = Kontrolna skupina – samo jedno odgovaranje (*N* = 152; *df* za dva faktora = 34; *df* za jedan faktor = 35); 5 = Skupina s proceduralnom uputom – samo jedno odgovaranje (*N* = 151; *df* za dva faktora = 34; *df* za jedan faktor = 35); 6 = Skupina s konceptualnom uputom – samo jedno odgovaranje (*N* = 152; *df* za dva faktora = 34; *df* za jedan faktor = 35).

9. ŽIVOTOPIS

Vanja Putarek rođena je u Varaždinu, a osnovnu školu i opću gimnaziju završila je u Ivancu. Preddiplomski studij psihologije upisala je 2007. godine na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu te je isti završila 2010. godine, kada upisuje diplomski studij, također na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirala je 5. lipnja 2012. godine, obranivši diplomski rad pod nazivom „Percipirana popularnost u ranoj adolescenciji: spolne razlike te povezanost s usamljenošću i relativnim pubertalnim statusom“, izrađen pod mentorstvom prof. dr. sc. Gordane Keresteš. Za vrijeme studija bila je dobitnica stipendije Sveučilišta u Zagrebu iz Fonda za stipendiranje darovitih studenata. Osim toga, dobitnica je Dekanove nagrade za izvrsnost u studiju (2012. godine), Bujasove zlatne značke za osobito vrijedan diplomski rad (2013. godine) te grupne Državne nagrade Hrvatskog sabora za popularizaciju znanosti (2016. godine).

Od 2014. godine radi kao asistentica na Katedri za školsku psihologiju Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Radila je i kao vanjski suradnik na Studijskom centru socijalnog rada Pravnog fakulteta u Zagrebu (ak. god. 2013/2014 i 2014/2015). Bila je jedna od voditeljica Ljetne psihologijske škole 2016. godine. Od 2014. godine aktivno je uključena u provedbu projekata o motivacijskim čimbenicima za učenje matematike i prirodnih znanosti, financiranih u okviru potpore znanstvenim i umjetničkim istraživanjima Sveučilišta u Zagrebu. Autorica je i koautorica 11 objavljenih znanstvenih radova, pet stručnih radova, te je sudjelovala s 21 priopćenjem na domaćim i međunarodnim znanstvenim konferencijama. Povremeno recenzira radove u inozemnim renomiranim časopisima.

Nakon završenog fakulteta sudjelovala je u nekoliko edukacija vezanih uz poučavanje, učenje matematike, pisanje znanstvenih radova i napredne statističke metode, poput strukturalnog modeliranja i višerazinskog modeliranja. Završila je drugi stupanj edukacije iz bihevioralno-kognitivnih psihoterapija pri Hrvatskom udruženju za bihevioralno-kognitivne terapije u Zagreb te trenutno polazi treći, ujedno i posljednji stupanj. Od 2015. godine angažirana je i u Savjetovalištu Filozofskog fakulteta za studente.

Sudjelovala je u organizaciji nekoliko domaćih i međunarodnih konferencija, PsihoFesta – festivala popularizacije psihologije, kao i sudjelovanja PsihoFesta na festivalima popularizacije znanosti. Članica je Hrvatske psihološke komore, Hrvatskog psihološkog društva i Hrvatskog udruženja za bihevioralno-kognitivne terapije.

Znanstveni radovi

Putarek, V. i Keresteš, G. (2012). Tko je popularan u ranoj adolescenciji? Povezanost percipirane popularnosti sa spolom i usamljenosti. *Društvena istraživanja, 21*(4), 949–968. doi: 10.5559/di.21.4.07

Putarek, V. i Keresteš, G. (2016). Self-perceived popularity in early adolescence: Accuracy, associations with loneliness, and gender differences. *Journal of Social and Personal Relationships, 33*(2), 257–274. doi: 10.1177/0265407515574465

Putarek, V., Rovan, D. i Vlahović-Štetić, V. (2016). Odnos uključenosti u učenje fizike s ciljevima postignuća, subjektivnom vrijednosti i zavisnim samopoštovanjem. *Društvena istraživanja, 25*(1), 107–129. doi: 10.5559/di.25.1.06

Modić Stanke, K. i Putarek, V. (2016). Odrednice interesa studenata za društveno korisno učenje. U M. Orel (Ur.), *International Conference EDUvision 2016 "Modern Approaches to Teaching the Coming Generations"* (str. 1105–1117). Ljubljana: EDUvision,.

Putarek, V., Vlahović-Štetić, V. i Kozina, M. (2017). Predictors and outcomes of test anxiety. U K. A. Moore i P. Buchwald (Ur.), *Stress and anxiety - coping and resilience* (str. 115–126). Berlin: Logos Verlag Berlin GmbH.

Pavlin-Bernardić, N., Putarek, V., Rovan, D., Petričević, E. i Vlahović-Štetić, V. (2017). Students' engagement in learning physics: A subject-specific approach. U I. Burić (Ur.), 20th *Psychology Days in Zadar: Book of selected proceedings* (str. 193–203). Zadar: University of Zadar.

Petričević, E., Rovan, D., Pavlin-Bernardić, N., Putarek, V. i Vlahović-Štetić, V. (2017). Personality and engagement in learning physics: the mediating effect of achievement goals. U I. Burić (Ur.), *20th Psychology Days in Zadar: Book of selected proceedings* (str. 205–215). Zadar: University of Zadar.

Putarek, V. (2018). Pregled teorijskih okvira i suvremenih pristupa za poticanje konceptualnog i proceduralnog znanja u matematici. *Psihologijske teme, 27*(3), 453–479. doi: 10.31820/pt.27.3.6

Putarek, V. i Vlahović-Štetić, V. (2019). Metacognitive feelings, conflict detection and illusion of linearity. *Psychological Topis, 28*(1), 171–192. doi: 10.31820/pt.28.1.9

Putarek, V., Rovan, D. i Pavlin-Bernardić, N. (2019). Relations of patterns of perfectionism to BIS sensitivity, achievement goals and student engagement. *Learning and Motivation, 68*. doi: 10.1016/j.lmot.2019.101596

Putarek, V. i Pavlin-Bernardić, N. (2019, u tisku). The role of self-efficacy for self-regulated learning, achievement goals, and engagement in academic cheating. *European Journal of Psychology of Education*.

Stručni radovi

Mikolić, A. i Putarek, V. (2013). Osamljenost žena rane i srednje odrasle dobi: zaštitno značenje emocionalne podrške partnera, prijatelja i obitelji. *Socijalna psihijatrija, 41*(4), 235–244.

Putarek, V., Oštrić, I. i Kamenov, Ž. (2015). Tko će se izboriti za mene, ako ne ja? Što je asertivnost i kako je možemo postići? U M. Tonković Grabovac, U. Mikac i T. Vukasović Hlupić (Ur.), *Psihofestologija – ovo nije samo još jedna knjiga iz popularne psihologije* (str. 90–94). Zagreb: Odsjek za psihologiju Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Putarek, V. i Bolf, T. (2017). Vježbam, dakle dobro se osjećam! Što tjelesna aktivnost znači za naše tijelo i um? U S. Salkičević, A. Huić, M. Parmač Kovačić i B. Rebernjak (Ur.), *Psihofestologija 2 – Psihologijska znanost na popularan način* (str. 146–150). Zagreb: Odsjek za psihologiju Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Putarek, V. i Oštrić, I. (2017). Zašto odgađam neodgodivo? Samohendikepiranje ili što sve radimo da ne uspijemo u životu. U S. Salkičević, S., A. Huić, M. Parmač Kovačić i B. Rebernjak (Ur.), *Psihofestologija 2 – Psihologijska znanost na popularan način* (str. 155–159). Zagreb: Odsjek za psihologiju Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.